Теорема 2. *Если преобразование (3) таково, что любую систему (1) оно переводит в* Е-*эквивалентную ей систему (2), то матрица L этого преобразования является обобщенной матрицей Ляпунова.*

Выделим теперь из множества Ω подмножество Ω_1 такое, что

$$\Omega_1=\{L|\ L\in\Omega,\ 0<\inf_{t\geq 0}|\det L(t)|\leq\sup_{t\geq 0}|\det L(t)|<+\infty\}. \qquad (7)$$

Очевидно, что Ω_1 – не пустое множество, поскольку $\Omega_0\in\Omega_1$, однако $\Omega_0\neq\Omega_1$, так как, например, если $L(t)=(l_{ij}(t))$, $i,j=1,2$, $l_{11}(t)=l_{21}(t)=l_{22}(t)=t+1$, $l_{12}(t)=t+1+(t+1)^{-1}$, то $L\in\Omega_1$, но $L\notin\Omega_0$. Обозначим Ω^* такое подмножество множества Ω_1, что преобразование (3) с матрицей $L\in\Omega^*$ переводит любую систему (1) с ограниченными коэффициентами в систему (2) также с ограниченными коэффициентами.

Теорема 3. *Множество Ω^* совпадает с Ω_0.*

Доказательство. Пусть L – любая матрица из Ω^*. Рассмотрим систему (1) с матрицей $A=E$, где E – единичная матрица. Тогда матрица приведенной системы $L(E)=E-L^{-1}DL$ ограничена на $[0,+\infty[$, поэтому ограниченной на этом промежутке является и матрица $L^{-1}DL$. Рассмотрим теперь систему (1) с матрицей $A=E_{ij}$, где E_{ij} – матрица, у которой в i-ой строке j-ом столбце стоит 1, а остальные элементы матрицы равны 0. Из ограниченности матрицы $L(E_{ij})=L^{-1}E_{ij}L-L^{-1}DL$ следует ограниченность матрицы $L^{-1}E_{ij}L$. Пусть $L=(l_{ij})$, $L^{-1}=(\alpha_{ij})$, $i,j=1,...,n$. Тогда ограниченными будут являться все функции $\alpha_{ki}\, l_{jm}$ при любых значениях индексов i, j, k, m. Следовательно, ограничены все элементы матрицы $l_{jm}L^{-1}$, а значит, и ее определитель $\det(l_{jm}L^{-1})$, поэтому

$$+\infty>\sup_{t\geq 0}\left|\det\left(l_{jm}(t)L^{-1}(t)\right)\right|=\sup_{t\geq 0}\left|l_{jm}(t)\right|^n\left|\det L^{-1}(t)\right|\geq\sup_{t\geq 0}\left|l_{jm}(t)\right|^n\sup_{t\geq 0}{}^{-1}\left|\det L(t)\right|,$$

откуда $\sup_{t\geq 0}|l_{jm}(t)|^n<+\infty$. Следовательно, ограничены все элементы матрицы L и поэтому из ограниченности матрицы $L^{-1}DL$ следует ограниченность матрицы DL; кроме того, из условия (7) следует неравенство $\inf_{t\geq 0}|\det L(t)|>0$, которое, в свою очередь, влечет ограниченность матрицы L^{-1}. Включение $L\in\Omega_0$ следует теперь из (4). Поскольку L – любая матрица из Ω^*, то $\Omega^*=\Omega_0$.

1. Изобов Н.А. // Итоги науки и техники. Математический анализ. М., 1947. Т.12. С.71.
2. Богданов Ю.С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №6. С.707.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Поступила в редакцию 06.03.98.

УДК 519.10

Д.П.ПОДКОПАЕВ

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ*

A multicriteria trajectorial (on a system of subsets of a finite set) problem is considered. The components of the vector criterion (the partial criteria) belong to a broad class of functions and may specifically be the well-known partial criteria MINSUM, MINMAX and MINMIN. Stability of the Pareto set to "small" independent perturbations of the vector criterion parameters has been investigated.

* Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект №Ф97-266).

Известно (см., напр., [1–3]), что совпадение множества Парето с множеством Слейтера является необходимым и достаточным условием устойчивости множества Парето векторных задач дискретной оптимизации с линейными критериями. В [4] показано, что для векторной траекторной задачи в случае произвольной комбинации критериев MINSUM, MINMAX и MINMIN это условие остается лишь достаточным.

В данной статье описан более широкий класс частных критериев, при которых названное совпадение является необходимым и достаточным условием устойчивости множества Парето векторной траекторной задачи.

Пусть $m>1$, $C=\{c_1,c_2,\dots,c_m\}$ – некоторое множество, каждому элементу c_j которого приписаны веса $w_i(c_j)=a_{ij}$, $i\in N_n=\{1,2,\dots,n\}$, причем $A=\{a_{ij}\}_{n\times m}\in\mathbf{R}^{nm}$. Через $\mathbf{a}^i$ будем обозначать i-ю строку матрицы A.

Пусть $T=\{t\}$ – система непустых подмножеств множества C, называемых траекториями. Будем предполагать в дальнейшем, что $|T|>1$.

Для каждого индекса $i\in N_n$ на множестве траекторий T и множестве векторов $\mathbf{R}^m$ определим вещественную функцию $f_i(t,\mathbf{x})=f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_m)$. Тем самым задается вектор-функция (векторный критерий)

$$f(t,A)=(f_1(t,\mathbf{a}^1),f_2(t,\mathbf{a}^2),\dots,f_n(t,\mathbf{a}^n)):\ T\times\mathbf{R}^{nm}\to\mathbf{R}^n,$$

компоненты которой (частные критерии), не ограничивая общности, будем считать минимизируемыми (при фиксированной матрице A):

$$f_i(t,\mathbf{a}^i)\to\min_T,\quad i\in N_n.$$

Под векторной (n-критериальной) траекторной задачей будем понимать задачу нахождения множества Парето (множества эффективных траекторий)

$$P(f,A)=\{t\in T:\ \forall\, t'\in T\ (\tau(t,t',A)\geq\mathbf{0}\Rightarrow\tau(t,t',A)=\mathbf{0})\},$$

где $\tau(t,t',A)=(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)$, $\tau_i=\tau_i(t,t',\mathbf{a}^i)=f_i(t,\mathbf{a}^i)-f_i(t',\mathbf{a}^i)$, $\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)\in\mathbf{R}^n$.

Как обычно [1,4,5] возмущение матрицы $A\in\mathbf{R}^{nm}$ будем осуществлять путем сложения этой матрицы с матрицами множества

$$\mathrm{B}(\varepsilon)=\{B\in\mathbf{R}^{nm}:\ \|B\|<\varepsilon\},$$

где $\varepsilon>0$, $\|B\|$ – норма l_∞ (чебышевская норма) в пространстве $\mathbf{R}^{nm}$, т.е.

$$\|B\|=\max\{|b_{ij}|:\ (i,j)\in N_n\times N_m\},\quad B=\{b_{ij}\}_{n\times m}.$$

Следуя [1,4], множество Парето $P(f,A)$ назовем устойчивым, если

$$\exists\,\varepsilon>0\ \forall\, B\in\mathrm{B}(\varepsilon)\ (P(f,A+B)\subseteq P(f,A)).$$

Легко видеть, что множество $P(f,A)$ не является устойчивым, если

$$\exists\, t\in T\setminus P(f,A)\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\, B\in\mathrm{B}(\varepsilon)\ (t\in P(f,A+B)). \tag{1}$$

В дальнейшем для всякого множества $t\subseteq C$ будем использовать обозначение

$$N(t)=\{j\in N_m:\ c_j\in t\}.$$

Будем говорить, что вектор-функция $f(t,A)$ обладает свойством α, если каждая ее компонента $f_i(t,\mathbf{x})$, $i\in N_n$, непрерывна по переменной $\mathbf{x}$.

Легко видеть, что для всякой вектор-функции $f(t,A)$, обладающей свойством α, выполняется формула

$$\exists\, \varepsilon>0\ \forall\, B\in \mathrm{B}(\varepsilon)\ (Sl(f,A+B)\subseteq Sl(f,A)),$$

где $Sl(f,A)=\{t\in T\colon \forall\, t'\in T\setminus\{t\}\ \exists\, s\in N_n\,(\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s)\leq 0)\}$ – множество Слейтера, или множество слабо эффективных траекторий [6]. Поэтому с учетом очевидного включения $P(f,A)\subseteq Sl(f,A)$ справедливо следующее

Утверждение 1. Если вектор-функция $f(t,A)$ обладает свойством α, то выполнение равенства $P(f,A)=Sl(f,A)$ является достаточным условием устойчивости множества Парето $P(f,A)$.

Будем говорить, что вектор-функция $f(t,A)$ обладает свойством β, если для всякого индекса $i\in N_n$ выполняются следующие условия:

(β.1) для любой траектории $t\in T$ функция $f_i(t,\mathbf{x})$ постоянна по каждой переменной x_j, $j\in N(E\setminus t)$ и возрастает по каждой переменной x_j, $j\in N(t)$;

(β.2) для любых траекторий t и t' функция $\tau_i(t,t',\mathbf{x})$ сохраняет знак по каждой переменной x_j, $j\in N(t\cap t')$.

Утверждение 2. Выполнение равенства $P(f,A)=Sl(f,A)$ является необходимым условием устойчивости множества Парето $P(f,A)$, если вектор-функция $f(t,A)$ обладает свойством β.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть функция $f(t,A)$ обладает свойством β и множество Парето $P(f,A)$ устойчиво. Предположим, что $P(f,A)\neq Sl(f,A)$, т.е. существует траектория $t\in Sl(f,A)\setminus P(f,A)$.

Пусть $t'\in T\setminus\{t\}$. Тогда в силу определения множества $Sl(f,A)$ существует такой индекс $s\in N_n$, что $\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s)\leq 0$. Для любого положительного числа ε рассмотрим возмущающую матрицу $B=\{b_{ij}\}_{n\times m}$ с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases}-\delta, & \text{если } i\in N_n,\ j\in N(t),\\ \delta, & \text{если } i\in N_n,\ j\in N(E\setminus t),\end{cases}$$

где $0<\delta<\varepsilon$. С учетом условия (β.1) имеем $\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s+\mathbf{b}^s)=\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s+\mathbf{b}'+\mathbf{b}'')$, где

$$\mathbf{b}'=(b'_1,b'_2,\dots,b'_m)\in\mathbf{R}^m,\quad b'_j=\begin{cases}-\delta, \text{ если } j\in N(t\cap t'),\\ 0 \text{ для остальных } j,\end{cases}$$

$$\mathbf{b}''=(b''_1,b''_2,\dots,b''_m)\in\mathbf{R}^m,\quad b''_j=\begin{cases}-\delta, \text{ если } j\in N(t\setminus t'),\\ \delta, \text{ если } j\in N(t'\setminus t),\\ 0 \text{ для остальных } j.\end{cases}$$

В силу условия (β.2) получаем $\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s+\mathbf{b}')\leq 0$, а поскольку хотя бы одно из множеств $t\setminus t'$, $t'\setminus t$ не пусто, с учетом условия (β.1) заключаем $\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s+\mathbf{b}'+\mathbf{b}'')<0$.

Таким образом, выводим

$$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, B\in\mathrm{B}(\varepsilon)\ \forall\, t'\in T\setminus\{t\}\ \exists\, s\in N_n\,(\tau_s(t,t',\mathbf{a}^s+\mathbf{b}^s)<0),$$

т.е.

$$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, B\in\mathrm{B}(\varepsilon)\ (t\in P(f,A+B)).$$

Следовательно, в силу (1) множество $P(f,A)$ не является устойчивым. Утверждение 2 доказано.

Из утверждений 1 и 2 вытекает

Теорема. Выполнение равенства $P(f,A)=Sl(f,A)$ является необходимым и достаточным условием устойчивости множества Парето $P(f,A)$, если вектор-функция $f(t,A)$ обладает свойствами α и β.

Отсюда, в свою очередь, вытекает следующий известный результат.

Следствие [1]. Необходимым и достаточным условием устойчивости множества Парето $P(f,A)$ линейной (с частными критериями вида MINSUM) траекторной задачи является выполнение равенства $P(f,A)=Sl(f,A)$.

1. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1995. №4. С.137.
2. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. // Докл. АН СССР. 1989. Т.307. №3. С.527.
3. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.
4. Ефимчик Н.Е., Подкопаев Д.П. // Известия АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1995. №3. С.123. Деп. в ВИНИТИ 06.12.94, №2799-В94.
5. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №3. С.39.
6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.

Поступила в редакцию 26.03.97.

УДК 537.612.62

В.М.ДОБРЯНСКИЙ, Е.Л.МАГЕР, В.Ф.МАЛИШЕВСКИЙ, Г.М.ЧОБОТ, В.П.ЯРУНИЧЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СИНТЕЗА КЕРАМИКИ Y-Ba-Cu-O МЕТОДОМ ТГА

Thermogravimetrical method was used to examine the process of synthesis of Y-Ba-Cu-O at the range from the room temperature up to 900°C on the "Derivatograph-C" plant in inert and air atmospheres. In cooling process of heatihg and cooling a change of mass of the examined material was determined.

Определяющими факторами интенсивности протекания гетерогенной твердофазной реакции формирования ВТСП-керамики $Y\text{-}Ba_2\text{-}Cu_3\text{-}O_{7-\delta}$ наряду с температурой и временем синтеза являются дисперсность исходных компонентов и величина приложенного давления в процессе синтеза, от которых зависят значения сверхпроводящих параметров и плотности [1]. Физические свойства иттриевой керамики, в том числе и температуры сверхпроводящего перехода, зависят от содержания кислорода, которое определяет и тип кристаллической структуры [2].

В данной статье приводятся экспериментальные результаты исследования синтеза иттриевой керамики с помощью термогравиметрического (ТГА) анализа на приборе "Derivatograph-C".

Исходными компонентами являлись оксиды Y_2O_3, BaO и CuO чистотой не хуже ЧДА. Исходные материалы подвергали тщательному мокрому помолу в шаровой мельнице с целью получения микронных порошков. После прокаливания оксидов формировались навески стехиометрического состава, которые помещались в платиновые тигли. Масса шихты в платиновых тиглях не превышала 100 мг.

Нагревание проводилось до температуры 900°С в воздушной среде и в атмосфере аргона марки А, содержание кислорода в котором не превышало 0,01%. Скорость нагрева составляла 10 гр/мин. Изменения массы исследуемого вещества в зависимости от температуры при нагреве в воздухе представлены на рисунке (кривая *1*). Выше 430°С происходит уменьшение