$$(p_{31})_u \sin\frac{\beta}{2} + (p_{21})_u \cos\frac{\beta}{2} = 0;\ (p_{31})_u \cos\frac{\beta}{2} - (p_{21})_u \sin\frac{\beta}{2} = 0,$$

где $\beta(t) = \int\limits_{-t}^{t} p_{32}(\tau)d\tau$,

или:

А2. Почти всюду на R справедливы:

5^0. $p_{22}(t)$, $p_{33}(t)$ – произвольные нечетные функции;

6^0. $p_{11}(t)=p_{33}(t)$; $p_{13}(t)=-p_{31}(t)$;

$$(p_{12})_u \sin\frac{\gamma}{2} + (p_{32})_u \cos\frac{\gamma}{2} = 0;\ (p_{12})_u \cos\frac{\gamma}{2} - (p_{32})_u \sin\frac{\gamma}{2} = 0;$$

$$(p_{21})_u \sin\frac{\gamma}{2} + (p_{23})_u \cos\frac{\gamma}{2} = 0;\ (p_{21})_u \cos\frac{\gamma}{2} - (p_{23})_u \sin\frac{\gamma}{2} = 0,$$

где $\gamma(t) = \int\limits_{-t}^{t} p_{13}(\tau)d\tau$.

Тогда справедливо следующее

Утверждение. Одно из условий А, А1, или А2 обеспечивает выполнимость соотношения (2). Если к тому же $P(t+2\omega)=P(t)$, то система (1) устойчива и обладает одним семейством периодических решений с начальными условиями $(0,0,a)^T$, $(b,0,0)^T$, $(0,c,0)^T$, $\forall a,b,c \in R$, соответственно.

Доказательство следует из того, что отражающие матрицы системы (1) в этом случае имеют вид:

$$F(t),\ F_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta(t) & \sin\beta(t) \\ 0 & -\sin\beta(t) & \cos\beta(t) \end{pmatrix},\quad F_2(t) = \begin{pmatrix} \cos\gamma(t) & 0 & -\sin\gamma(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma(t) & 0 & \cos\gamma(t) \end{pmatrix}$$

соответственно.

1. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. // Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.

2. Кастрица О.А. // Системы с изометрическими свойствами: VII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Мн., 1996. Ч.2.

3. Мироненко В.И. // Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986. С.30.

4. Альсевич Л.А. // Диф. уравнения. 1986. Т.22. №5. С.822.

Поступила в редакцию 03.12.97.

УДК 517.926

С.А.МАЗАНИК

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛЯПУНОВА

Some properties of Lyapunov and generalized Lyapunov transformations of linear differential systems are investigated. Sufficient conditions under which a given transformation belongs to a class Lyapunov or generalized Lyapunov transformations are obtained.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$Dx=A(t)x,\ x\in\mathrm{R}^n,\ t\geq 0,\ D=d/dt, \tag{1}$$

где $A(t)$ – локально интегрируемая на $[0,+\infty[$ матричная функция. В дальнейшем будем предполагать, что характеристические показатели (см. [1,с.71]) всех решений системы (1) ограничены. Следуя Ю.С.Богданову [2], будем называть систему (1) асимптотически эквивалентной системе

$$Dy=B(t)y,\ y\in\mathrm{R}^n,\ t\geq 0, \tag{2}$$

если существует невырожденное линейное преобразование

$$x=L(t)y, \tag{3}$$

переводящее (1) в (2), причем L – матрица Ляпунова, т.е. абсолютно непрерывная на $[0,+\infty[$ матричная функция, удовлетворяющая следующему условию

$$\max\left\{\sup_{t\geq 0}\|L(t)\|,\ \sup_{t\geq 0}\left\|L^{-1}(t)\right\|,\ \sup_{t\geq 0}\|DL(t)\|\right\}<+\infty. \tag{4}$$

Если же матрица L преобразования (3) является обобщенной матрицей Ляпунова, т.е. матрицей, у которой равны нулю характеристические показатели норм самой матрицы и обратной матрицы, то систему (1) будем называть обобщенно асимптотически эквивалентной системе (2). Отметим, что из асимптотической (обобщенной) эквивалентности систем (1) и (2) не следует, что преобразование, переводящее (1) в (2), обязано быть преобразованием (обобщенным) Ляпунова. В настоящей работе представлен ряд "обратных теорем" теории преобразований линейных систем, т.е. утверждений, содержащих условия, при которых способность сохранять те или иные характеристики систем при заданных преобразованиях определяет принадлежность этих преобразований к тому или иному классу преобразований Ляпунова.

Наряду с системами (1) и (2) рассмотрим сопряженные им системы

$$Dx=-A^T(t)x,\ x\in\mathrm{R}^n,\ t\geq 0, \tag{5}$$

$$Dy=-B^T(t)y,\ y\in\mathrm{R}^n,\ t\geq 0. \tag{6}$$

Обозначим через $\Lambda[A]$, $\Lambda[B]$, $\Lambda[-A^T]$ и $\Lambda[-B^T]$ совокупности показателей систем (1), (2), (5) и (6) соответственно. Назовем системы (1) и (2) Е-эквивалентными, если $\Lambda[A]=\Lambda[B]$ и $\Lambda[-A^T]=\Lambda[-B^T]$. Легко проверить, что отношение эквивалентности введено корректно. Заметим также, что обобщенное преобразование Ляпунова переводит систему в Е-эквивалентную ей систему.

Обозначим множество обобщенных матриц Ляпунова через Ω, а множество матриц Ляпунова Ω_0, $\Omega_0\subset\Omega$. Далее мы будем отождествлять систему с ее матрицей коэффициентов и записывать условие приводимости системы (1) в систему (2) с помощью преобразования (3) в виде $B=L(A)$. Легко проверить (см. [3,с.243]), что $L(A)=L^{-1}AL-L^{-1}DL$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если преобразование (3) таково, что любую систему (1) оно переводит в асимптотически (обобщенно) эквивалентную ей систему (2), то матрица L этого преобразования является матрицей (обобщенной) Ляпунова.*

Теорема 2. *Если преобразование (3) таково, что любую систему (1) оно переводит в* Е*-эквивалентную ей систему (2), то матрица L этого преобразования является обобщенной матрицей Ляпунова.*

Выделим теперь из множества Ω подмножество Ω_1 такое, что

$$\Omega_1=\{L|\ L\in\Omega,\ 0<\inf_{t\geq 0}|\det L(t)|\leq \sup_{t\geq 0}|\det L(t)|<+\infty\}. \tag{7}$$

Очевидно, что Ω_1 – не пустое множество, поскольку $\Omega_0\in\Omega_1$, однако $\Omega_0\neq\Omega_1$, так как, например, если $L(t)=(l_{ij}(t))$, $i,j=1,2$, $l_{11}(t)=l_{21}(t)=l_{22}(t)=t+1$, $l_{12}(t)=t+1+(t+1)^{-1}$, то $L\in\Omega_1$, но $L\notin\Omega_0$. Обозначим Ω^* такое подмножество множества Ω_1, что преобразование (3) с матрицей $L\in\Omega^*$ переводит любую систему (1) с ограниченными коэффициентами в систему (2) также с ограниченными коэффициентами.

Теорема 3. *Множество Ω^* совпадает с Ω_0.*

Доказательство. Пусть L – любая матрица из Ω^*. Рассмотрим систему (1) с матрицей $A=E$, где E – единичная матрица. Тогда матрица приведенной системы $L(E)=E-L^{-1}DL$ ограничена на $[0,+\infty[$, поэтому ограниченной на этом промежутке является и матрица $L^{-1}DL$. Рассмотрим теперь систему (1) с матрицей $A=E_{ij}$, где E_{ij} – матрица, у которой в i-ой строке j-ом столбце стоит 1, а остальные элементы матрицы равны 0. Из ограниченности матрицы $L(E_{ij})=L^{-1}E_{ij}L-L^{-1}DL$ следует ограниченность матрицы $L^{-1}E_{ij}L$. Пусть $L=(l_{ij})$, $L^{-1}=(\alpha_{ij})$, $i,j=1,\ldots,n$. Тогда ограниченными будут являться все функции $\alpha_{ki}\ l_{jm}$ при любых значениях индексов i, j, k, m. Следовательно, ограничены все элементы матрицы $l_{jm}L^{-1}$, а значит, и ее определитель $\det(l_{jm}L^{-1})$, поэтому

$$+\infty>\sup_{t\geq 0}\left|\det\left(l_{jm}(t)L^{-1}(t)\right)\right|=\sup_{t\geq 0}\left|l_{jm}(t)\right|^n\left|\det L^{-1}(t)\right|\geq\sup_{t\geq 0}\left|l_{jm}(t)\right|^n\sup_{t\geq 0}{}^{-1}\left|\det L(t)\right|,$$

откуда $\sup_{t\geq 0}|l_{jm}(t)|^n<+\infty$. Следовательно, ограничены все элементы матрицы L и поэтому из ограниченности матрицы $L^{-1}DL$ следует ограниченность матрицы DL; кроме того, из условия (7) следует неравенство $\inf_{t\geq 0}|\det L(t)|>0$, которое, в свою очередь, влечет ограниченность матрицы L^{-1}. Включение $L\in\Omega_0$ следует теперь из (4). Поскольку L – любая матрица из Ω^*, то $\Omega^*=\Omega_0$.

1. Изобов Н.А. // Итоги науки и техники. Математический анализ. М., 1947. Т.12. С.71.
2. Богданов Ю.С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №6. С.707.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Поступила в редакцию 06.03.98.

УДК 519.10

Д.П.ПОДКОПАЕВ

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ*

A multicriteria trajectorial (on a system of subsets of a finite set) problem is considered. The components of the vector criterion (the partial criteria) belong to a broad class of functions and may specifically be the well-known partial criteria MINSUM, MINMAX and MINMIN. Stability of the Pareto set to "small" independent perturbations of the vector criterion parameters has been investigated.

* Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект №Ф97-266).