Краткие сообщения

УДК 519.1

И.Э.ЗВЕРОВИЧ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СОВЕРШЕННЫХ ДОМИНАНТНО-ПОКРЫВАЮЩИХ ГРАФОВ

A graph is called perfect dominant-covering if the domination number equals to the total point-covering number for any induced subgraph.

A characterization of the perfect dominant-covering graphs is given in terms of forbidden induced subgraphs.

Мы придерживаемся стандартной терминологии [2]. В [3] введено понятие тотального вершинного покрытия графа как объединения вершинного покрытия и всех изолированных вершин. Соответственно *числом тотального вершинного покрытия* $\alpha_t(G)$ графа G называется наименьшая мощность тотального вершинного покрытия графа G. Множество вершин D называется *доминирующим*, если каждая вершина, не принадлежащая D, смежна с некоторой вершиной из D. *Числом доминирования* $\gamma(G)$ графа G называется мощность наименьшего доминирующего множества графа G.

Предложение 1. Для любого графа G справедливо неравенство $\alpha_t(G)\geq\gamma(G)$.

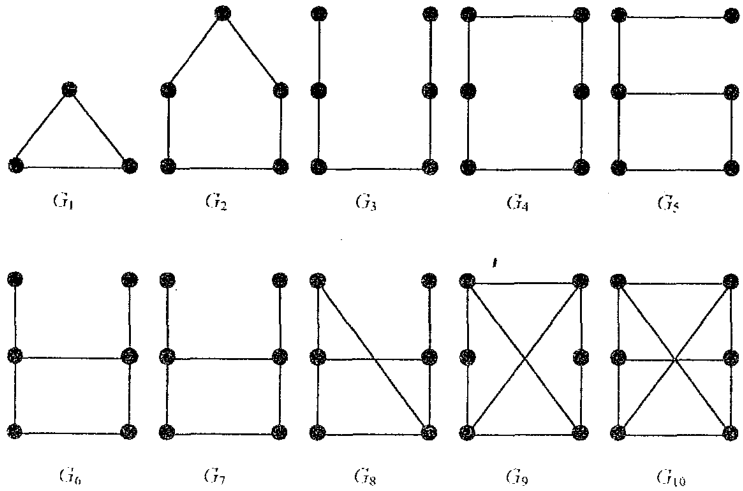
Доказательство. Пусть B – наименьшее тотальное вершинное покрытие графа G. Для любой вершины $u\in VG\backslash B$ существует некоторое инцидентное ей ребро uv, поскольку B содержит все изолированные вершины графа G. Так как B является вершинным покрытием и $u\notin B$, то $v\in B$. Следовательно, B является доминирующим множеством. Поэтому $\gamma(G)\leq|B|=\alpha_t(G)$. Доказательство окончено.

По аналогии с известными классами совершенных доминантно-независимых и совершенных доминантно-кликовых графов, охарактеризованных в [4] и [1] соответственно, определим *совершенный доминантно-покрывающий граф* G как граф, для которого равенство $\alpha_t(H)=\gamma(H)$ выполняется для каждого порожденного подграфа H графа G.

Ниже дается характеризация совершенных доминантно-покрывающих графов в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Теорема 1. Граф G является совершенным доминантно-покрывающим графом тогда и только тогда, когда в G нет порожденных подграфов G_1-G_{10}, показанных на рисунке.

Доказательство. *Необходимость*. Легко проверить, что $\gamma(G_1)=1$, $\alpha_t(G_1)=2$, $\gamma(G_i)=2$ и $\alpha_t(G_i)=3$ при $i=2,3,...,10$, т.е. графы G_1-G_{10} не могут быть порожденными подграфами совершенного доминантно-покрывающего графа.



Запрещенные порожденные подграфы для совершенных доминантно-покрывающих графов

Достаточность. Пусть G не содержит порожденных подграфов G_1–G_{10}. Покажем, что равенство $\gamma(H)=\alpha_t(H)$ выполняется для любого связного нетривиального порождённого подграфа H графа G. (В тривиальном случае $H=K_1$ имеем $\gamma(H)=\alpha_t(H)=1$, а для несвязного графа достаточно рассмотреть каждую компоненту отдельно.)

Пусть сначала в H нет циклов, т.е. H является деревом. Диаметр этого дерева не превосходит 4, поскольку в H нет простой цепи $P_6=G_3$. Легко видеть, что в таком дереве множество вершин, смежных с концевыми, является одновременно наименьшим доминирующим множеством и наименьшим тотальным вершинным покрытием, т.е. $\gamma(H)=\alpha_t(H)$. (Единственное исключение – дерево K_2, для которого следует взять только одну концевую вершину.)

Пусть теперь в графе H есть хотя бы один цикл. Покажем, что любой цикл в H (не обязательно порожденный) является порожденным подграфом C_4. Действительно, строя всевозможные графы, имеющие остовный подграф $P_6=G_3$, можно убедиться, что каждый из них либо совпадает с одним из графов G_3–G_{10}, либо содержит порожденный подграф G_1 или G_2. Отсюда следует, что в H нет подграфа P_6 и поэтому нет циклов C_n, $n\geq 6$. Порожденный цикл C_5 запрещается графом G_2, а наличие в нем любого дополнительного ребра приводит к запрещенному циклу $C_3=G_1$.

Итак, рассмотрим произвольный цикл C графа H, который является порожденным циклом C_4 с множеством вершин $\{u,v,w,x\}$ и множеством ребер $\{uv,vw,wx,xu\}$. Для любой вершины $y\in VH\setminus VC$ рассмотрим кратчайшую цепь Q, соединяющую y с VC. Так как в H нет подграфа P_6, то длина цепи Q равна 1, т.е. каждая вершина множества $VH\setminus VC$ смежна с некоторой вершиной из VC. Далее, хотя бы одна из двух смежных вершин в C имеет степень 2 (т.е. смежна только с двумя вершинами цикла C). Действительно, иначе опять получаем подграф P_6. Без ограничения общности можно считать, что вершины u и w имеют в H степень 2. Следовательно, множество $\{v,x\}$ является наименьшим доминирующим и $\gamma(H)=2$. Далее, множество $VH\setminus\{v,x\}$ является независимым, так как в противном случае граф H содержит запрещенный порожденный подграф C_3 или C_5. Поэтому множество $\{v,x\}$ является наименьшим тотальным вершинным покрытием $\alpha_t(H)=2$.

Итак, $\alpha_t(H)=\gamma(H)$, т.е. граф G является совершенным доминантно-покрывающим графом. Теорема доказана.

Следствие 1. Граф G является совершенным доминантно-покрывающим тогда и только тогда, когда G не содержит подграфов C_3, C_5 и P_6.

Следствие показывает, что фактически свойство "быть совершенным доминантно-покрывающим графом" является сильно наследственным, т.е. сохраняется при переходе к подграфам, а не только к порожденным подграфам, как установлено в определении.

1. Зверович В.Э., Зверович И.Э. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. №2. С.107.
2. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
3. Sampathkumar E. // Discr. Math. 1990. Vol.86. P.137.
4. Zverovich I.E., Zverovich V.E. // J. Graph Theory. 1995. Vol.20. №3. P.375.

Поступила в редакцию 02.10.97.

УДК 517.962.4

Л.А.АЛЬСЕВИЧ, О.А.КАСТРИЦА

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ

Some stability conditions of periodic systems with orthogonal reflective function are obtenaited.

Рассматривается линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

с матрицей $P(t)$, заданной почти всюду на R и суммируемой на любом конечном отрезке. Решениями системы считаем абсолютно непрерывные функции, почти всюду на R дифференцируемые и обращающие систему в тождество почти всюду на R. Решение $\varphi(t;t_0,x_0)$ однозначно определяется начальными условиями [1,54].

Целью данной работы является нахождение условий на коэффициенты системы (1), при которых всякое решение имеет совпадающие в точках t и $-t$ нормы, т.е.

$$\|\varphi(t;t_0,x_0)\| = \|\varphi(-t;t_0,x_0)\|. \tag{2}$$

(Под нормой вектора x понимаем евклидову норму $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.)

Поставленная задача рассматривалась для двумерных систем [2,40].

В настоящей работе изучается система (1) при $n=3$. Исследование проводится с помощью отражающей функции [3,с.11] системы:

$$x(t) \mapsto \Phi(t,(x(t)) = x(-t).$$

Обозначим $\overline{\varphi} = \varphi(-t)$, $2\varphi_ч=\varphi+\overline{\varphi}$, $2\varphi_н=\varphi-\overline{\varphi}$, $P(t)=[p_{ij}(t)]$, $i,j=1,2,3$ и рассмотрим условия: