то построить последний множитель Якоби, используя теорему 1, не представляется возможным. Однако на основании предложения 1 и теоремы 1 можем утверждать.

Теорема 2. *Если полная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (1) допускает p=n−m линейных дифференциальных операторов* $L_\xi = l_{i\xi}(z)\partial_i \; (i=\overline{1,n}), \xi=\overline{1,p}$, *которые в совокупности с m линейными дифференциальными операторами* $A_j, j=\overline{1,m}$, *образуют систему из n линейно независимых операторов, то на их основе всегда можно построить либо первый интеграл, либо последний множитель Якоби системы (1).*

1. Чеботарёв Н.Г. Теория групп Ли. М.; Л. 1940.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
3. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.; М., 1934.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л., 1936. Ч.2.
5. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
6. Горбузов В.Н. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. №1. С.20.
7. Гафаров Г.Г. // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. №3. С.531.

Поступила в редакцию 28.05.97.

УДК 517.956

В.И.КОРЗЮК, Е.С.ЧЕБ

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОБ АВТОЛЕГИРОВАНИИ КРЕМНИЯ ПРИМЕСЬЮ СКРЫТОГО СЛОЯ

This work is examined the mathematical model of description of profile and concentration of incorporated impurity during the process of high-temperature annealing with epitaxial growth in the one-dimensional geometry. For corresponding mathematical problem it is proved energetic inequalities and its solvability in case of Fick's linear equation using averaging operators with variable step.

Эпитаксиальные слои являются неотъемлемой частью биполярных полупроводниковых структур. На формирование профиля концентрации примеси в эпитаксиальном слое существенное влияние оказывают процессы диффузии в твердой фазе, взаимодействие примеси со структурными дефектами, а также процессы роста. Для сверхскоростных БИС наиболее актуальна разработка тонкослойных субмикронных биполярных технологий, позволяющих создавать приборы, способные работать с максимальными скоростями переключения в режиме высоких и сверхвысоких плотностей тока. Естественно, это подтверждает и практика, существенную помощь в разработке способов создания таких приборов с использованием компьютеров оказывает математическое моделирование технологических процессов [1,2]. Важным этапом математического моделирования является корректная постановка математической задачи и доказательство ее разрешимости.

В данной статье рассматривается математическая модель, которая позволяет рассчитать профиль имплантированной примеси в процессе высокотемпературного отжига при эпитаксиальном наращивании в одномерной геометрии. С математической точки зрения эта задача интересна тем, что основное уравнение задается в нецилиндрической области и граничное условие на криволинейной границе представляет собой уравнение, в которое входят производная по пространственной переменной, производная по временной переменной и сама функция.

1. Для описания процесса перераспределения примеси в кремниевой структуре при эпитаксиальном росте используется второй закон Фика [3] в виде уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(d\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где u — концентрация примеси в кремнии, d—коэффициент диффузии, t, x – независимые переменные, соответствующие времени и расстоянию.

На границе раздела газ – эпитаксиальный слой для характеристики протекающих процессов используются два потока, которые описывают массоперенос примеси через границу раздела. Первым потоком является диффузионный поток, а вторым – поток, связанный с массопереносом примеси из газовой фазы

$$d\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x^{(1)}(t)}=-K_{mp}\left(P_D-\frac{u(t,x^{(1)}(t))}{K_p}\right)+Vu(t,x^{(1)}(t))+K_A\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x^{(1)}(t)}, \tag{2}$$

где $u(t,x^{(1)}(t))$ – концентрация примеси на границе раздела $x=x^{(1)}(t)$ между газовой и твердой фазами, V – скорость эпитаксиального роста, P_D – парциальное давление легирующей примеси в газовой фазе; K_{mp}, K_p, K_A – параметры, связанные с конкретным реактором, в котором протекает процесс, и определяемые конкретно для каждого случая. Подробный вывод формул (2) для потоков приведен в [3].

Сделаем более точной математическую постановку рассматриваемой задачи. Независимую переменную времени будем и в дальнейшем обозначать через t, которая меняется в пределах времени наблюдения $0<t<T<+\infty$. Предположим, что концентрация имплантируемой примеси послойно одинакова, где слои перпендикулярны некоторой прямой, точки которой x и $x^{(1)}(t)<x<x^{(2)}(t)$. Рассмотрим ограниченную область $Q=\{(t,x)\in R^2\colon 0<t<T,$ $x^{(1)}(t)<x<x^{(2)}(t)\}$, в которой задано уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(d(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(t,x), \tag{3}$$

где R^2 – двумерное евклидово пространство (плоскость). В (3) $d(t,x,u)$ – эффективный коэффициент диффузии примеси и $d(x,t,u)=D\left(1+u/(u^2+4n_i^2)^{1/2}\right)$, n_i – собственная концентрация электронов в полупроводнике. Будем рассматривать уравнение (3), когда оно линейно

$$\Im u=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(d(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(t,x),\qquad (t,x)\in Q, \tag{4}$$

т.е. коэффициент $d(x,t)$ не зависит от u. Предположим, что $d(t,x)\geq c_0>0$ для всех $(t,x)\in\overline{Q}$, $d(t,x)\in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $\overline{Q}$ – замыкание Q. Границу ∂Q области Q разобьем на части: $\Omega_0=\{(t,x)\in\partial Q/t=0\}$; $\Omega_T=\{(t,x)\in\partial Q/t=T\}$; $\Gamma_1=\{(t,x)\in\partial Q/0<t<T,$ $x=x^{(1)}(t)\}$; $\Gamma_2=\{(t,x)\in\partial Q/0<t<T,\ x=x^{(2)}(t)\}$; тогда $\partial Q=\Omega_0\cup\Omega_T\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$. На нижнем основании Ω_0 зададим начальное условие

$$lu=u(0,x)=\varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ описывает распределение легирующей примеси перед эпитаксиальным наращиванием. На границе раздела газ — кремний $x^{(1)}(t)$ условие (2) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}+\beta u\right)\left(t,x^{(1)}(t)\right)=0\,, \qquad (6)$$

где $\partial/_{\partial l}=k(t,x)\,\partial/_{\partial t}-\partial/_{\partial x}$, $k(t,x)\geq k_0>0$, $\beta(t,x)\geq 0$. Справа на достаточном расстоянии наблюдаем установившуюся концентрацию $u(t,x)\equiv u_0$. Поэтому считаем $x^{(2)}(t)$ =const, хотя это и не обязательно, и выполняется условие

$$u(t,\,x^{(2)}(t))=0. \qquad (7)$$

Следовательно, диффузионное перераспределение примеси при термообработке структуры в процессе роста эпитаксиального слоя ищется как решение в простейшем случае линейного уравнения диффузии (4) с соответствующим начальным (5) и граничными условиями (6),(7) в области Q с подвижными границами.

Условие 1. Пусть $x^{(i)}(t)$ (i=1,2) – рассматриваемые в качестве частей границы ∂Q кусочно-гладкие функции, для которых справедлива формула Остроградского относительно области Q, причем $x^{(2)}\in C^1([0,T])$.

Замечание 1. Вообще говоря, условие (2) является неоднородным. Однородное условие (6) не ограничивает общности, так как с помощью теорем о продолжении функцию, заданную на границе $x^{(1)}(t)$, можно продолжить на всю плоскость, а затем с помощью соответствующей замены искомой функции $u(t,x)$ через новую условие (2) сводится к однородному условию (6). То же самое можно сделать и с условием (7), если оно является неоднородным.

2. Обратимся к вопросу существования и единственности решения задачи (4)–(7). Для этой цели будем использовать методы функционального анализа и рассматривать сильное решение этой задачи [4] в паре подходящих пространств B и H.

Обозначим через $C^2_{\text{гр}}$ множество функций $u(t,x)$, дважды непрерывно дифференцируемых $C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям (6),(7).

Итак, решение задачи (4)–(7) рассматриваем как решение операторного уравнения

$$Lu=F \qquad (8)$$

с областью определения $D(L)=C^2_{\text{гр}}$, где $L=(\Im,l)$, $F=(f(t,x),\ \varphi(x))$, $\Im$ – оператор уравнения (4), l – оператор начального условия (5).

Пусть B — банахово пространство, получаемое замыканием множества $D(L)$ по норме

$$\|u\|_B=\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|u\|_{L_2(\Omega_t)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega_t)}\right)(t)+\left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|_{L_2(Q)}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L_2(Q)}, \qquad (9)$$

где Ω_t – сечение области Q гиперплоскостью t=const, т.е. Ω_t={ $(t,x)\in Q$/ t=const, $0\leq t\leq T$}, $\partial/_{\partial r}=\partial/_{\partial t}+r_1(t,x)\,\partial/_{\partial x}$ – производная по направлению r векторного поля $\mathfrak{R}$, которое определяется следующим образом:

($\mathfrak{R}_1$) для любой точки $(t,x)\in\overline{Q}$ и вектора $r(t,x)=(1,r_1(t,x))$ функция $r_1(t,x)\in C^1\left(\overline{Q}\right)$;

($\Re_2$) поле $\Re$ выбирается таким образом, что $(\nu,r)\geq 0$ для любой точки $(t,x)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где $\nu(t,x)=(\nu_t,\nu_x)$ – вектор внешней относительно Q нормали в точках $\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\nu_t=\cos(\nu,t)$, $\nu_x=\cos(\nu,x)$, $(\nu,r)=\nu_t+r_1\nu_x$.

В качестве гильбертова пространства H возьмем декартово произведение $L_2(Q)\times H^1(\Omega_0)$, где $L_2(Q)$ – пространство квадратично суммируемых в Q функций, $H^1(\Omega_0)$ – пространство Соболева квадратично суммируемых в Ω_0 функций, обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными первого порядка.

Оператор L: $B\to H$ как оператор из B в H допускает замыкание $\overline{L}$. Решение операторного уравнения

$$\overline{L}u=F \tag{10}$$

называется сильным решением задачи (4)–(7) [4,5].

3. Для доказательства существования и единственности (см. [4]) решения уравнения (10) при любом $F\in H$ достаточно доказать энергетическое неравенство для оператора L и установить плотность множества его значений $\Re(L)$ в гильбертовом пространстве H.

Теорема 1. Пусть $d(t,x)\in C^1(\overline{Q})$, $\beta(t,x)\geq 0$ и выполняется условие 1. Тогда существует константа $c>0$, не зависящая от u, для которой справедливо энергетическое неравенство для оператора L

$$\|u\|_B\leq c\|Lu\|_H,\quad \forall\, u\in D(L). \tag{11}$$

Доказательство. Перепишем выражение в виде

$$\Im u=u_r-du_{xx}-(d_x+r_1)u_x,$$

где $u_r=\partial u/\partial r=\partial u/\partial t+r_1\,\partial u/\partial x$, $r=(1,r_1)\in\Re$. Векторное поле $\Re$ удовлетворяет условиям ($\Re_1$)–($\Re_2$). Пусть $Mu=m^{(0)}u_r+m^{(1)}u_{xx}+m^{(2)}u_x+m^{(3)}u$, $m^{(i)}(t,x)\in C^1(\overline{Q})$, $i=0,1,2,3$. Рассмотрим произведение $\Im u\cdot Mu$, преобразуя его соответствующим образом,

$$\begin{aligned}\Im u\,Mu&=m^{(0)}(u_r)^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(m^{(0)}du_xu_r\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(m^{(1)}u_xu_r\right)-m^{(1)}du_{xx}^2+\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[m^{(0)}du_x^2\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[m^{(1)}(d_x+r_1)u_x^2\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(m^{(2)}du_x^2\right)-\\&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[m^{(1)}u_x^2\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[m^{(3)}u^2\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(m^{(3)}du\,u_x\right)+A_1(u),\end{aligned} \tag{12}$$

где $A_1(u)=m_x^{(0)}du_xu_r-\frac{1}{2}\left(m^{(0)}d\right)_r u_x^2-m^{(0)}r_1u_xu_r-m^{(1)}u_xu_r+\frac{1}{2}m_r^{(1)}u_x^2+$ $+\frac{1}{2}\left(m^{(1)}d_x+m^{(1)}r_1\right)_x u_x^2+m^{(2)}u_xu_r+\frac{1}{2}\left(m^{(2)}d\right)_x u_x^2-m^{(2)}(d_x+r_1)u_x^2-\frac{1}{2}m_r^{(3)}u^2+$ $+m_x^{(3)}duu_x+m^{(3)}du_x^2-m^{(3)}r_1uu_x$. Интегрируем равенство (12) по области $Q^\tau=\{(t,x)\in Q/\ 0\leq t\leq\tau\leq T\}$. В результате получим

$$\int_{Q^\tau} \Im u Mu\, dt dx = \left\|\sqrt{m^{(0)}}\, u_r\right\|_{l_2(Q^\tau)} + \left\|\left(-m^{(1)}d\right)^{1/2} u_{xx}\right\|^2_{(Q^\tau)} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\partial Q^\tau}\left[\left(m^{(0)}d-m^{(1)}\right)u_x^2+m^{(3)}u^2\right](n,r)\,ds+\frac{1}{2}\int_{\partial Q}\left[\left(m^{(1)}-m^{(0)}d\right)u_x u_r- \right. \quad (13)$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(m^{(1)}d_x+r_1 m^{(1)}r_1-m^{(2)}d\right)u_x^2-m^{(3)}duu_x\right]n_x\,ds+\int_{\partial Q^\tau} A_2(u)\,dtds,$$

$$A_2(u)=A_1(u)-\frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial x}m^{(0)}du_x^2+\frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial x}m^{(1)}u_x^2-\frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial x}m^{(0)}u^2.$$

Доказываемое неравенство (11) можно получить при соответствующем выборе функций $m^{(i)}(t,x)$, $i=0,1,2,3$ в $\overline{Q}$. Потребуем выполнение условия

$$m^{(0)}(t,x),\ m^{(3)}(t,x)\geq c>0,\ m^{(1)}(t,x)\leq c<0,\ \forall\,(t,x)\in\overline{Q}. \quad (14)$$

Граница ∂Q^τ состоит из верхнего Ω_τ и нижнего Ω_0 оснований, боковых линий $\overline{Q^\tau}\cap\Gamma_1$ и $\overline{Q^\tau}\cap\Gamma_2$. Здесь вывод энергетического неравенства зависит от слагаемого с интегралом по Ω_τ. Рассмотрим его. В силу условия $(\Re_1)$ для точек $(\tau,x)\in\Omega_\tau$

$$(\nu,r)(\tau,x)\geq\delta_0>0. \quad (15)$$

Далее, используя (14) и (15), получаем неравенство

$$\int_{\Omega_t}\left[\left(m^{(0)}d-m^{(1)}\right)u_x^2+m^{(3)}u^2\right](n,r)\,ds\geq c\left(\left\|u_x\right\|_{L_2(\Omega_t)}+\left\|u\right\|_{L_2(\Omega_t)}\right)(\tau). \quad (16)$$

Рассмотрим криволинейный интеграл правой части (13) по линии $\overline{Q^t}\cap\Gamma_1$. Так как коэффициент условия (6) $k(t,x)\geq k_0>0$, то для $(t,x)\in\Gamma_1$

$$u_t=\frac{1}{k}u_x-\frac{\beta}{k}u,\quad u_r=\left(\frac{1}{k}+r_1\right)u_x-\frac{\beta}{k}u. \quad (17)$$

В силу условия 1 и требования $(\Re_2)$ при выборе поля $\Re$ $(\nu,r)\geq 0$ на Γ_1 и Γ_2. Поэтому

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\left[\left(m^{(0)}d-m^{(1)}\right)u_x^2+m^{(3)}u^2\right](n,r)\,ds\geq 0. \quad (18)$$

Рассмотрим оставшуюся часть криволинейного интеграла по Γ_1 равенства (13) с учетом (17), т.е.

$$\int_{\Gamma_1}A_3\,ds=\int_{\Gamma_1}\left[\left(m^{(1)}-m^{(0)}d\right)u_x u_r-\left(m^{(1)}d_x+m^{(1)}r_1-m^{(2)}d\right)u_x^2-m^{(3)}duu_x\right]n_x\,ds=$$

$$=\int_{\Gamma_1}B\,u_x^2ds+\int_{\Gamma_1}Cuu_x ds,$$

где коэффициенты B и C определены на Γ_1 и задаются следующим образом:

$$B=\left[\left(m^{(1)}-dm^{(0)}\right)\left(\frac{1}{k}+r_1\right)-\frac{1}{2}\left(m^{(1)}d_x+r_1m^{(0)}-m^{(2)}d\right)\right]n_x,$$

$$C=\left[\left(m^{(1)}-dm^{(0)}\right)\left(-\frac{b}{k}\right)-dm^{(3)}\right]n_x.$$

За счет соответствующего выбора функции $m^{(2)}(t,x)$ на Γ_1 всегда можно сделать $B\geq 0$, а при $m^{(3)}=-b/kd(m^{(1)}-dm^{(0)})$ соответственно $C=0$. Следовательно, при соответствующих $m^{(2)}(t,x)$ и $m^{(3)}(t,x)$ всегда

$$\int\limits_{\Gamma_1\cap Q^\tau}\left[Bu_x^2+Cuu_x\right]ds\geq 0. \tag{19}$$

На Γ_2 поле $\mathfrak{R}$ выберем касательным. Тогда, согласно (7), $u_r=0$ на Γ_2. Опять же за счет соответствующего выбора $m^{(2)}(t,x)$ $A_3\geq 0$ и

$$\int\limits_{\Gamma_2}A_3\,ds\geq 0. \tag{20}$$

Далее действуем стандартным образом. Некоторые положительные слагаемые равенства (13) оцениваем снизу, чтобы в результате получить норму пространства B, а все остальное переносим в правую часть и оцениваем сверху. Если все это проделать, используя при этом (14), (16), (18)–(20), получим неравенство

$$\left\|u_r\right\|^2_{L_2(Q^t)}+\left\|u_{xx}\right\|^2_{L_2(Q^t)}+\left(\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\left\|u_x\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right)(t)\leq$$

$$\leq c_2\left\|Lu\right\|^2_H+c_3\int\limits_0^t\left(\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\left\|u_x\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right)(t)\,dt, \tag{21}$$

где c_2 и c_3 — некоторые положительные константы. Чтобы избавиться в (21) от второго слагаемого, применяем неравенство Гронуолла [8]. Таким образом, мы получим неравенство, из которого легко следует доказываемое энергетическое неравенство (11) для любой функции $u\in D(L)$.

4. Для завершения доказательства существования сильного решения [4] задачи (4)–(7) при любом $F\in H$ надо показать плотность множества $\mathfrak{R}(L)$ в пространстве H [4]. Схема доказательства этого утверждения та же, что и в [4], которая осуществляется с помощью операторов осреднения переменного шага. Поэтому изложим только основные моменты, связанные с рассматриваемой задачей.

Запишем условие плотности $\mathfrak{R}(L)$ в H в виде равенства

$$(\Im u,v)_{L_2(Q)}+(lu,v_0)_{H^1(\Omega_0)}=0, \tag{22}$$

которое выполняется для любой функции $u\in D(L)$ и некоторого элемента $V=\{v(x,t),\ v_0(x)\}$ из H. Если в (22) u — функция только множества $D_0(L)=\{u\in D(L)\big|lu=0\}\subset D(L)$, то из (22) получаем равенство:

$$(\Im u,v)_{L_2(Q)}=0 \tag{23}$$

для любого $u\in D_0(L)$.

Чтобы получить условия на v в интегральном виде через операторы осреднения, в (23) вместо u берем $J_k u$, где J_k — операторы осреднения переменного шага [6,7]. В силу произвола выбора $u \in D_0(L)$ из (23) получим равенство

$$(u, \Im^+ J_k^* v)_{L_2(Q)} + (u, K^* v)_{L_2(Q)} = 0 \tag{24}$$

и условия

$$J_k^* v(T, x) = 0, \tag{25}$$

$$J_k^* v(t, x^{(1)}(t)) = \frac{\partial}{\partial x} J_k^* (t, x^{(1)}(t)) = 0, \tag{26}$$

$$J_k^* v(t, x^{(2)}(t)) = 0, \tag{27}$$

где J_k^* — сопряженный оператор по отношению к оператору J_k, K^* – сопряженный оператор к коммутатору $K = \Im J_k - J_k \Im$ и представляет собой оператор осреднения $\Im^+ = -\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(d \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Поскольку в (24) входит только сама функция u без ее производных, то (24) справедливо и для любой функции $u \in L_2(Q)$. Возьмем здесь в качестве u функцию

$$u(t,x) = \begin{cases} J_k^* v(t,x), & (t,x) \in Q \setminus Q^\tau, \\ 0, & (t,x) \in Q^\tau. \end{cases} \tag{28}$$

Подставляя (28) в (24), получим равенство

$$(J_k^* v, L^+ J_k^* v + K^* v)_{L_2(Q \setminus Q^\tau)} = 0. \tag{29}$$

Здесь можно представить

$$(J_k^* v, K^* v)_{L_2(Q \setminus Q^\tau)} = \left(J_k^* v, \frac{\partial}{\partial x} K_1^* v + K_2^* v\right)_{L_2(Q \setminus Q^\tau)},$$

где операторы K_i^* (i=1,2) представляют собой структуру операторов осреднения и для них справедлива оценка [7]

$$\left\| K_i^* v \right\|_{L_2(Q \setminus Q')} \le c \left\| v \right\|_{L_2(Q \setminus Q^\tau)}.$$

Далее, используя последнюю оценку, получим

$$\left| \left(J_k^* v, K^* v\right)_{L_2(Q \setminus Q^\tau)} \right| \le \varepsilon \left(\left\| J_k^* v \right\|^2_{L_2(Q \setminus Q^\tau)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} J_k^* v \right\|^2_{L_2(Q \setminus Q^\tau)} \right) + c(e) \left\| v \right\|^2_{L_2(Q \setminus Q^\tau)} \tag{30}$$

для любого $\varepsilon > 0$ и положительной функции $c(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to \infty$. Повторяя схему доказательства энергетического неравенства (11) в силу (30) при соответствующем выборе параметра ε, получим оценку

$$\left\| J_k^* v \right\|^2_{L_2(\Omega_t)}(t) \le c(\varepsilon) \left\| v \right\|^2_{L_2(Q \setminus Q')}$$

или

$$\left\|J_k^* v\right\|^2_{L_2(Q\setminus Q^\tau)} \leq (T-t)c(\varepsilon)\left\|v\right\|^2_{L_2(Q\setminus Q^\tau)}. \qquad (31)$$

Теперь τ выбираем таким, чтобы константа $(T\text{-}\tau)$ $c(\varepsilon)$ была меньше 1. Переходя в (31) к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\left\|v\right\|_{L_2(Q\setminus Q^\tau)} = 0$$

для данного выбранного τ. Затем показываем, что

$$\left\|v\right\|_{L_2\left((Q\setminus Q^\tau)\setminus Q^{\tau}\right)} = 0$$

для некоторого $\tau_1 (0 \leq \tau_1 < \tau < T)$.

Таким образом, за конечное число шагов мы покажем, что $v=0$ в $L_2(Q)$. Теперь из (22) имеем равенство

$$(l_0 u, v_0)_{H^1(\Omega_0)} = 0. \qquad (32)$$

Но множество $\{l_0 u \,/\, u \in D(L)\}$ плотно в $H^1(\Omega_0)$. Из (32) следует, что $v_0=0$ в $H^1(\Omega_0)$.

Замечание 2. В принципе доказательство и результат не изменятся, если вместо уравнения (4) рассматривать более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(d(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t,x)u\right) + a_0(t,x)u = f(t,x).$$

Таким образом, доказано существование и единственность сильного решения задачи, возникающей в результате моделирования расчета профиля имплантированной примеси в процессе высокотемпературного отжига при эпитаксиальном наращивании.

1. МОП-СБИС. Моделирование элементов и технологических процессов / Под ред. П.Антонетти. М., 1988.
2. Технология СБИС / Под ред. П. Антонетти. М., 1986.
3. Reif R., Dutton R.W. Computer Simulation in Silicon Epitaxy // J. Electrochem. Soc. 1981. Vol.128. №4. P.909.
4. Корзюк В.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3. С.55.
5. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
6. Буренков В.И. // Труды МИ АН СССР. 1974. Т.131. С.39.
7. Корзюк В.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №2. С.32.
8. Он же // Дифференц. уравнения. 1997. №12. С.1683.