где $m>1$, $C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$. Подставляя полученные представления для $a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,m-1}$ в левую часть первого из требований (9) и принимая во внимание, что $C_m^1-C_m^2+\ldots+(-1)^{m+1}C_m^m=1$, находим явное выражение для коэффициента $a_{m,m}$:

$$a_{m,m}=\frac{1-\exp(-\mu\tau)\left(1+\frac{\mu\tau}{1!}+\ldots+\frac{(\mu\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\right)}{\mu^m} \quad (m\geq 1). \tag{11}$$

Тем самым процесс построения многочленных коэффициентов (11), (10) матрицы (5) (с учетом (8)) завершен. На основе формул (11), (10) очевидным образом строятся монотонные процедуры вычисления этих коэффициентов.

Сопоставляя полученное с результатами работ [2], [4], [5], можно убедиться, что предлагаемые здесь аппроксимации матричной экспоненты (1) удовлетворяют всем высказанным выше требованиям. Мало того, можно показать дополнительно, что свойством монотонности по переменной $\lambda\in[-\mu,0]$ при любых значениях $m>0$ и $\tau>0$ обладают не только сама спектральная функция $E_m(\lambda,\tau)$, но и все ее производные по λ до порядка $m-1$ включительно.

Заметим, кроме того, что все коэффициенты $a_{m,i}$, $i=0,1,\ldots,m$, матричного многочлена (5) при любых фиксированных $m>0$ и $\tau>0$ положительны (см. (8), (10), (11)). Тем самым (в отличие от случая дробно-рациональных приближений) обеспечивается высокий уровень качественной аппроксимации матричной экспоненты (1) посредством многочленов вида (5) и при наличии у матрицы А положительных собственных значений. Это принципиально важно, скажем, для численного анализа переходных процессов с локальной неустойчивостью (см. [3]).

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1976.
2. Бобков В.В., Бобкова Н.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1994. №2. С.47.
3. Бобков В.В. // Соросовский образовательный журнал.1997. №7. С.121.
4. Он же. // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. №7. С.1174.
5. Он же. // Известия АН Беларуси: Сер. физ.-мат. наук. 1996. №1. С.15.

Поступила в редакцию 23.10.97.

УДК 517.95

Д.В.БУСЛЮК

ПОСТРОЕНИЕ ПОСЛЕДНЕГО МНОЖИТЕЛЯ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО ДОПУСКАЕМЫМ ОПЕРАТОРАМ

Construction of the last multipliers of the homogeneous linear system of partial differential equations on the base of linear differential operators is carried out.

Рассмотрим полную линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$A_j w=0, \quad j=\overline{1,m}, \tag{1}$$

когда голоморфные в области $G\subset\mathbf{C}^n$ линейные дифференциальные операторы $A_j=f_{ij}(z)\partial_i\ (i=\overline{1,n}),\ j=\overline{1,m}$, являются линейно несвязанными [1, с.90; 2, с.113], т.е. когда существуют такие скалярные функции векторного аргумента $\alpha_j : G \to \mathbf{C},\ j=\overline{1,m}$, голоморфные в области G и одновременно не обращающиеся в тождественный нуль на G, что линейная комбинация $\alpha_j(z)A_j = 0\ (j=\overline{1,m}),\ \forall z \in G$. Условие полноты [3,с.60–61; 4,с.521] системы (1) состоит в том, что скобки Пуассона любых двух операторов $A_j,\ j=\overline{1,m}$, представляются линейной комбинацией этих операторов

$$[A_j, A_\zeta] = \varphi_{j\zeta\theta}(z)A_\theta \quad (\theta=\overline{1,m}), \quad \forall z \in G, \quad j=\overline{1,m}, \quad \zeta=\overline{1,m}, \tag{2}$$

где функции $\varphi_{j\zeta\theta} : G \to \mathbf{C},\ j=\overline{1,m},\ \zeta=\overline{1,m},\ \theta=\overline{1,m}$, голоморфны в области G.

Групповой анализ систем (1) основывается на изучении (свойствах) линейных дифференциальных операторов, допускаемых рассматриваемой системой [5,с.7–137]. При этом исходим из того, что если для голоморфного в области G линейного дифференциального оператора L коммутаторы

$$[L, A_j] = b_{j\zeta}(z)A_\zeta \quad (\zeta=\overline{1,m}), \quad \forall z \in G, \quad j=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где скалярные функции векторного аргумента $b_{j\zeta} : G \to \mathbf{C},\ j=\overline{1,m},\ \zeta=\overline{1,m}$, голоморфны в области G, то система (1) допускает в области G оператор L.

Речь будем вести о первых интегралах и последних множителях Якоби системы (1). При этом будем основываться на следующих критериях (согласно подходам, изложенным в [3,с.55–93; 4,с.340–346; 5,с.7–93]).

Семейство $F(z)=C$, где C суть произвольная постоянная, построенное на основе голоморфной в области G функции $F : G \to \mathbf{C}$, является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда $A_j F(z) = 0,\ \forall z \in G,\ j=\overline{1,m}$.

Голоморфная в области G функция $\mu : G \to \mathbf{C}$ является последним множителем Якоби системы (1), если и только если

$$A_j\mu(z) + \mu(Z)\mathrm{div}A_j = 0, \quad \forall z \in G, \quad j=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где $divA_j = \partial_i f_{ij}(z)\ (i=\overline{1,n}),\ j=\overline{1,m}$.

Известно, что по допускаемым системой (1) операторам можно построить первый интеграл. Этот факт составляет содержание утверждения 25.4 [5,с.107], состоящего в следующем.

Предложение 1. Пусть полная линейная однородная система уравнений в частных производных (1) допускает линейные дифференциальные операторы $L_\tau,\ \tau=\overline{1,p+1}$, *причем операторы* $A_1,\ldots,A_m,L_1,\ldots,L_p$ *линейно несвязанны в области* G, *а оператор* L_{p+1} *представим в виде линейной комбинации* $L_{p+1}=F(z)L+\Phi_j(z)A_j$ $(\xi=\overline{1,p},\ j=\overline{1,m}),\ \forall z \in G$. *Тогда в области* G *либо* $F_\xi \equiv \mathrm{const}$, *либо семейство* $F_\xi(z)=C_\xi$ *есть первый интеграл системы (1),* $\xi=\overline{1,p}$.

Следуя подходу, изложенному в [6], укажем возможность построения последнего множителя Якоби системы (1) по допускаемым ею линейным дифференциальным операторам.

Теорема 1. *Пусть полная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (1) допускает p=n–m линейных дифференциальных операторов* $L_\xi = l_{i\xi}(z)\partial_i\ (i=\overline{1,n}),\ \xi=\overline{1,p}$, *которые в совокупности с m* *линейными дифференциальными операторами* A_j, $j=\overline{1,m}$, *образуют систему из n линейно несвязанных в области* $G\subset\mathbf{C}^n$ *операторов. Тогда система (1) имеет последний множитель Якоби*

$$\mu(z)=\det{}^{-1}M(A_1,\ldots,A_m,L_1,\ldots,L_p), \tag{5}$$

где квадратная матрица n-го порядка

$$M(A_1,\ldots,A_m,L_1,\ldots,L_p)=\begin{Vmatrix} f_{11}(z) & f_{21}(z) & \ldots & f_{n1}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{1m}(z) & f_{2m}(z) & \ldots & f_{nm}(z) \\ L_{11}(z) & L_{21}(z) & \ldots & L_{n1}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{1p}(z) & L_{2p}(z) & \ldots & L_{np}(z) \end{Vmatrix}.$$

Доказательство. Для r линейно несвязанных линейных дифференциальных операторов $B_1,\ldots,B_r$ от r переменных имеет место тождество [7]

$$B_1 \det M(B_1,\ldots,B_r)\equiv$$
$$\operatorname{div}B_1 \det M(B_1,\ldots,B_r)+\det M(B_1,[B_1,B_2],B_3,\ldots,B_r)+\ldots+\det M(B_1,\ldots,B_{r-1},[B_1,B_r]).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} &A_j \det M(A_1,\ldots,A_m,L_1,\ldots,L_p)\equiv \operatorname{div}A_j \det M(A_1,\ldots,A_m,L_1,\ldots,L_p)+\\ &+\sum_{p=1}^{m}(1-\delta_{pj})\det M\big(A_1,\ldots,[A_j,A_p],\ldots,A_m,L_1,\ldots,L_p\big)+\\ &+\sum_{k=1}^{n-m}\det M\big(A_1,\ldots,A_m,L_1,\ldots,[A_j,L_k],\ldots,L_p\big),\quad j=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{6}$$

где δ_{pj} — символ Кронекера. Поскольку дифференциальная система (1) допускает линейные дифференциальные операторы L_ξ, $\xi=\overline{1,p}$, то, согласно (3), имеет место система тождеств

$$[L_\xi,A_j]=g_{\xi js}(z)A_s \quad (s=\overline{1,m}),\quad \forall z\in G,\quad \xi=\overline{1,p},\quad j=\overline{1,m}, \tag{7}$$

где скалярные функции векторного аргумента $g_{\xi js}\colon G\to\mathbf{C}$, $\xi=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,m}$, $s=\overline{1,m}$, суть голоморфные по z в области $G\subset\mathbf{C}^n$. Учитывая полноту линейной однородной дифференциальной системы (1), на основании (2), (6) и (7) получаем соотношения

$$A_j \det M(z)\equiv \operatorname{div}A_j \det M(z),\quad \forall z\in G\subset\mathbf{C}^n,\quad j=\overline{1,m},$$

из которых, в силу (4), следует, что скалярная функция векторного аргумента (5) является последним множителем Якоби системы уравнений в частных производных (1). Это и требовалось доказать.

В случае, когда линейные дифференциальные операторы A_j, $j=\overline{1,m}$, L_ξ, $\xi=\overline{1,n-m}$, в совокупности линейно связанные, но линейно независимые, то построить последний множитель Якоби, используя теорему 1, не представляется возможным. Однако на основании предложения 1 и теоремы 1 можем утверждать.

Теорема 2. *Если полная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (1) допускает p=n−m линейных дифференциальных операторов* $L_\xi = l_{i\xi}(z)\partial_i$ $(i=\overline{1,n}), \xi=\overline{1,p}$, *которые в совокупности с m линейными дифференциальными операторами* A_j, $j=\overline{1,m}$, *образуют систему из n линейно независимых операторов, то на их основе всегда можно построить либо первый интеграл, либо последний множитель Якоби системы (1).*

1. Чеботарёв Н.Г. Теория групп Ли. М.; Л. 1940.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
3. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.; М., 1934.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л., 1936. Ч.2.
5. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
6. Горбузов В.Н. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. №1. С.20.
7. Гафаров Г.Г. // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. №3. С.531.

Поступила в редакцию 28.05.97.

УДК 517.956

В.И.КОРЗЮК, Е.С.ЧЕБ

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОБ АВТОЛЕГИРОВАНИИ КРЕМНИЯ ПРИМЕСЬЮ СКРЫТОГО СЛОЯ

This work is examined the mathematical model of description of profile and concentration of incorporated impurity during the process of high-temperature annealing with epitaxial growth in the one-dimensional geometry. For corresponding mathematical problem it is proved energetic inequalities and its solvability in case of Fick's linear equation using averaging operators with variable step.

Эпитаксиальные слои являются неотъемлемой частью биполярных полупроводниковых структур. На формирование профиля концентрации примеси в эпитаксиальном слое существенное влияние оказывают процессы диффузии в твердой фазе, взаимодействие примеси со структурными дефектами, а также процессы роста. Для сверхскоростных БИС наиболее актуальна разработка тонкослойных субмикронных биполярных технологий, позволяющих создавать приборы, способные работать с максимальными скоростями переключения в режиме высоких и сверхвысоких плотностей тока. Естественно, это подтверждает и практика, существенную помощь в разработке способов создания таких приборов с использованием компьютеров оказывает математическое моделирование технологических процессов [1,2]. Важным этапом математического моделирования является корректная постановка математической задачи и доказательство ее разрешимости.

В данной статье рассматривается математическая модель, которая позволяет рассчитать профиль имплантированной примеси в процессе высокотемпературного отжига при эпитаксиальном наращивании в одномерной геометрии. С математической точки зрения эта задача интересна тем, что основное уравнение задается в нецилиндрической области и граничное условие на криволинейной границе представляет собой уравнение, в которое входят производная по пространственной переменной, производная по временной переменной и сама функция.