# Математика и информатика

*УДК 519.15*

*В.В.ГОРЛОВ, В.И.САДОВНИЧИЙ, П.ТИТТМАН (ГЕРМАНИЯ)*

## О ПОЛИНОМАХ НАДЕЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

In this paper authors investigated the problem of all-terminal reliability for communicative systems, based of complete graphs and Grids. The generated functions for the reliability polinoms are presented here. This approach can be used to obtain the explicit formula for complete graphs and some cases of Grids. One efficient method of computation of the reliability for any-dimensional Grid-System is described. For example the all-terminal reliability representation for Grids, where $m$=2;3;4, are computed.

В статье изучаются коммуникационные системы, представляющие собой связанный $n$-вершинный граф, ребра которого могут находиться (независимо друг от друга) в “исправном” или “неисправном” состояниях. Надежностью такой коммуникационной системы называется вероятность того, что для любых двух вершин коммуникационной системы имеется хотя бы один соединяющий их путь, состоящий из “исправных” ребер. Исследуется надежность коммуникационных систем, граф которых является полным графом или прямоугольной целочисленной решеткой (grid) $m\times n$. Даются точные определения и формулировки результатов.

Пусть $G=(V,E)$ – связный неориентированный граф с множеством вершин (полюсов) $V$, $|V|=n$, и множеством ребер (каналов) $E$.

*Определение 1.* Коммуникационной системой будем называть граф $G$, каждый канал $e$ которого с вероятностью $p$ (не зависящей от других каналов) является “исправным” и с вероятностью $q=1-p$ является “неисправным”. Надежность коммуникационной системы $r(G)$ – это вероятность того, что для любой пары полюсов найдется хотя бы один соединяющий эти полюса путь, состоящий только из “исправных” ребер. Очевидно,что для любого несвязного графа $H$ $r(H)=0$. Отметим, что в общем случае задача нахождения надежности относится к числу $NP$-полных проблем [1].

В дальнейшем будем использовать следующую рекуррентную формулу для надежности $r(G)$, сводящую процедуру вычисления $r(G)$ к процедуре вычисления надежности графов с меньшим числом полюсов и каналов: пусть $e$ – произвольный канал, $G_{+e}$ – граф,полученный из $G$ удалением канала $e$ и отождествлением концевых полюсов, $G_{-e}$ – граф, полученный из $G$ удалением канала $e$, тогда $r(G)=pr(G_{+e})+qr(G_{-e})$.

Отметим,что данная формула может быть использована как определение надежности, из этой формулы также следует, *что* для любого графа $r(G)$ является полиномом от $p$.

## 1. Производящие функции полиномов надежности полных графов

Для надежности $r_n$ полного $n$-вершинного графа имеется следующая рекуррентная формула:

$$r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} q^{k(n-k)} r_k \tag{1}$$

Для удобства дальнейших выкладок положим $r_0=0$, а также $Q = q^{\frac{1}{2}}$. Заметим, что $q^{k(n-k)} = q^{\frac{1}{2}(n^2-k^2-(n-k)^2)} = Q^{n^2-k^2-(n-k)^2}$.

Формула (1) перепишется и примет вид:

$$\frac{r_n}{Q^{n^2}} = \frac{1}{Q^{n^2}} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{r_k}{Q^{k^2}} \frac{1}{Q^{(n-k)^2}}.$$

Введем следующие обозначения: $a_n = \dfrac{1}{Q^{n^2}}$, $t_n = \dfrac{r_n}{Q^{n^2}}$.

Имеем $t_n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \cdot t_k \cdot a_{n-k} = a_n$.

Далее $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot t_k \cdot a_{n-k} = a_n$, так как $\binom{n-1}{k-1} \cdot t_n \cdot a_0 = t_n$, $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot t_k \cdot a_{n+1-k} = a_{n+1}$,

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot t_{m+1} \cdot a_{n-m} = a_{n+1}, \text{ где } m=k-1. \tag{2}$$

Введем для последовательностей $(a_n)_1^\infty$, $(t_n)_1^\infty$ экспоненциальные производящие функции $Te(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$, $Ae(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{n^2}}{n!} x^n$.

**Теорема 1.** $Te(x) = \ln(Ae(x))$.

Доказательство. Воспользуемся формулами для производной и произведения экспоненциальных производящих функций: $c_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot a_{n-m} \cdot b_m$, где $C(x)=A(x) \cdot B(x)$, $A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$.

Из [2] получим: $Te'(x) \cdot Ae(x) = Ae'(x)$, $Te'(x) = \dfrac{Ae'(x)}{Ae(x)} = (\ln(Ae(x)))'$, $Te(x) = \ln(Ae(x)) + Te(0) = \ln(Ae(x))$, так как $Te(0) = r_0 = 0$. Теорема доказана.

*Следствие 1.* $$r_n = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_j=n \\ n_i \geq 1}} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \binom{k}{n_1 - n_j} Q^{-\sum_{i=1}^{j} n_i^2} \right\}.$$

Доказательство. Используя известный ряд для $ln(1+y)$, получим $\ln\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q^{-i^2} \frac{Z^i}{i!}\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} A^j$, где $A = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{-i^2} \frac{Z^i}{i!}$. Вновь используя формулу для общего члена произведения двух экспоненциальных производящих функций, получим: $A^j=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_j=k\\ n_i\geq 1}}\binom{k}{n_1\ldots n_j}Q^{-n_1^2-n_2^2-\ldots-n_j^2}\right)\frac{Z^k}{k!}$. Таким образом,

$$\ln\left(1+\left(\sum_{i=1}^{\infty}Q^{-i^2}\frac{Z^i}{i!}\right)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_j=k\\ n_i\geq 1}}\binom{k}{n_1\ldots n_j}Q^{-\sum_{i=1}^{j}n_i^2}\right\}\frac{Z^k}{k!}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left\{\sum_{\substack{n+\ldots+n_j=k\\ n_i\geq 1}}\binom{k}{n_1\ldots n_j}Q^{-\sum_{i=1}^{j}n_i^2}\right\}\right]\frac{Z^k}{k!}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $Z$, получим:

$$r_n=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_j=n\\ n_i\geq 1}}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{k}{n_1\ldots n_j}Q^{-\sum_{i=1}^{j}n_i^2}\right\}\text{ или } r_n=\sum_{\substack{k,n_1+\ldots+n_k=n\\ n_i\geq 1}}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{k}{n_1\ldots n_k}Q^{-\sum_{i=1}^{k}n_i^2},$$

где суммирование ведется по всем положительным решениям линейного уравнения $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Следствие доказано.

## 2. Производящие функции и полиномы надежности прямоугольных целочисленных решеток

В качестве графа $G(V,E)$ возьмем прямоугольную целочисленную решетку $m\times n$, ($G=\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}$). В [2] получены верхняя и нижняя оценки надежности для общего случая. Однако большой практический интерес представляет ситуация для небольших фиксированных $m$. Цель данной части работы – получение формул для вычисления надежности $r_{2xn}$, $r_{3xn}$, $r_{4xn}$.

Во всех трех случаях воспользуемся двумя классическими формулами:

$$r(G,P)=\sum_{i=0}^{k}N_i p^i(1-p)^{k-i},\tag{3}$$

где $N_i$ – число "функциональных" $i$-реберных путей;

$$r(G,P)=pr(G_{+e},p)+(1-p)r(G_{-e},p),\tag{4}$$

позволяющая "сжимать" и "расщеплять" граф $G$.

1. Рассмотрим случай $m=2$. На рис.1 изображена решетка $L_{2,n}$ размера $2\times n$.

Для того чтобы данная коммуникационная система была "исправной" (т.е. в графе существовал бы хотя бы один путь, соединяющий две вершины), необходимо, чтобы хотя бы два ребра из ребер $e$, $f$, $g$ графа $L_{2,n}$ были "функциональными" (т.е. через них проходил бы путь), либо все три ребра являлись бы "функциональными". В первом случае граф $L_{2,n}$ "сжимаем" на два ребра и получаем граф $L_{2,n-1}$, во втором – на три и получаем граф, который обозначим $H_{n-1}$.

Введем следующие обозначения: $l_n=r(L_{2,n},p)$, $h_n=r(H_n,p)$. Тогда, применяя формулу [1], получим следующее рекуррентное соотношение: $l_n=3p^2(1-p)l_{n-1}+p^3h_{n-1}$. Очевидно, что $l_1=p$ и $h_1=1$.

Осталось получить формулу для выражения надежности графа типа $H_n$, который изображен на рис.2 Применяем ту же схему. Для "исправности" $H_n$ необходима "исправность" либо одного из двух ребер $e$ и $f$, либо их одновременная "исправность". После "сжатия" получаем соответственно графы $L_{2,n-1}$ и $H_{n-1}$ и, применяя [1], имеем:

$$h_n=2p(1-p)l_{n-1}+p^2h_{n-1}. \qquad (5)$$

Разрешив систему уравнений (5), (6), (7) относительно $l_n$, получим полином надежности для $L_{2,n}$ в явном виде.

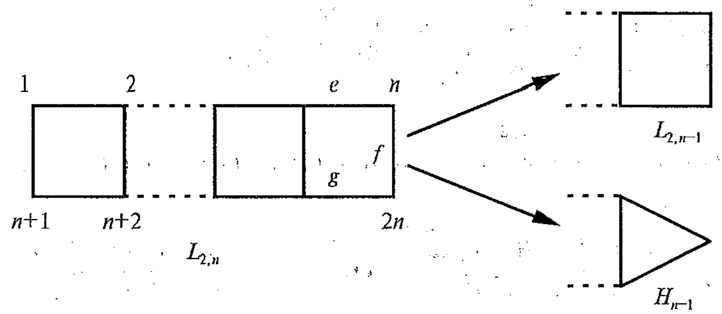



Рис.1.

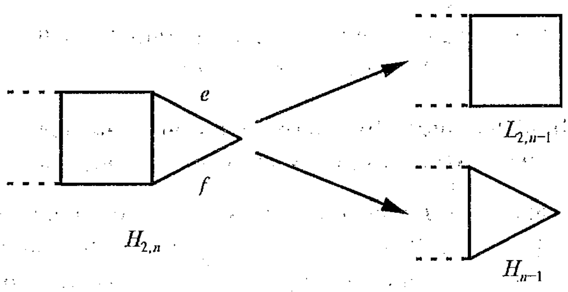



Рис.2.

**Теорема2.** $r(L_{2,n},p)=\dfrac{p^{2n-1}}{2^n a}\left[(4-3p+a)^n-(4-3p-a)^n\right]$, где $a=\sqrt{12-20p+9p^2}$.

2. Аналогично рассуждая для случая $m=3$, для графа $L_{3,n+1}$ получаем следующие необходимые "исправные" пути:

а) 8 путей, состоящих из трех ребер,

б) все возможные комбинации из четырех ребер,

в) единственный путь, состоящий из всех пяти ребер.

После преобразования графа $L_{3,n+1}$ имеем для варианта а) – граф $L_{3,n}$, для б) – графы $B_n$ и $D_n$ и для в) – граф $E_n$ (рис.3).

Введем следующие обозначения: $a_n=r(A_n)=r(L_{3,n})$, $b_n=r(B_n)$, $d_n=r(D_n)$, $e_n=r(E_n)$. Тогда $a_{n+1}=8p^3(1-p)a_n+p^4(1-p)(4b_n+d_n)+p^5e_n$.

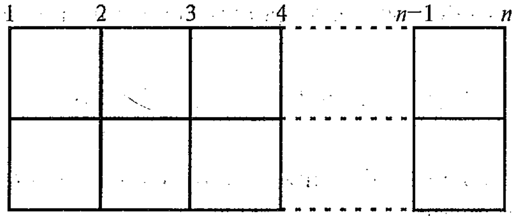
Точно так же рассматривая графы $B_n$, $D_n$, и $E_n$, получим сответствующие соотношения:

$b_{n+1}=5p^2(1-p)^2a_n+p^3(1-p)(3b_n+d_n)+p^4e_n$,

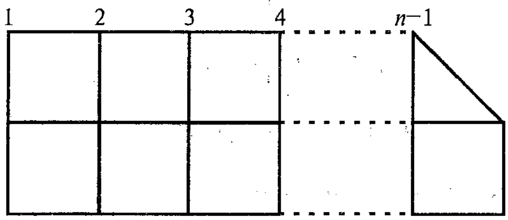
$d_{n+1}=p^2(1-p)^2(8-5p)a_n+p^3(1-p)[(4-2p)b_n+(3-2p)d_n]+p^4(2-p)e_n$,

$e_{n+1}=3p(1-p)^2a_n+p^2(1-p)(6n+d_n)+p^3e_n$.

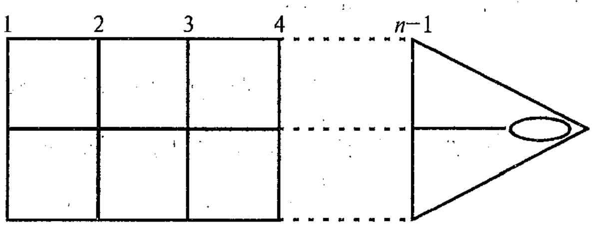
Очевидно, что $a_1=p^2$, $b_1=p$, $d_1=2p-p^2$. $e_1=1$.



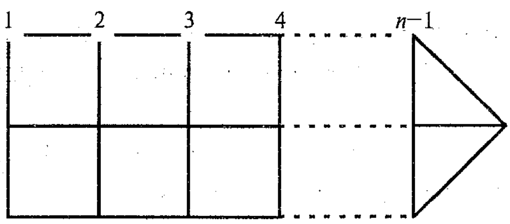

$L_{3,n}=A_n$




$B_n$




$D_n$




$E_n$

Рис.3

Столь подробно на случае для $m=4$ мы останавливаться не будем, хотя он, естественно, является наиболее трудоемким. Для графа $L_{4,n+1}$ получим 10 графов и столько же рекуррентных соотношений.

Для $m=2$ перепишем рекуррентное соотношение в матричном виде: $\begin{pmatrix} l_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = A_{2,n}\begin{pmatrix} l_n \\ h_n \end{pmatrix}$, где $A_{2,n}=\begin{pmatrix} 3p^2(1-p) & p^3 \\ 2p(1-p) & p^2 \end{pmatrix}$ и введем производящую вектор-функцию $f_{2,n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} l_k \\ h_k \end{pmatrix} z^k$.

Нетрудно показать, что $A_{2,n}f_{2,n}(z)=\dfrac{f_{2,n}(z)}{z}-\begin{pmatrix} l_1 \\ h_1 \end{pmatrix}$ и, следовательно, $f_{2,n}(z)=\left(-zA_{2,n}+E\right)^{-1}\begin{pmatrix} l_1 \\ h_1 \end{pmatrix}z$.

Поступая аналогичным образом для произвольного $m$, получим для общего случая:

**Теорема 3.** $f_{m,n}(z)=\left(-zA_{mxn}+E\right)^{-1}\cdot S\cdot z$, где $S$ — вектор-столбец начальных условий.

*Следствие*: Производящие фукции для надежностей $(L_{2,n})$, $(L_{3,n})$, $(L_{4,n})$ будут соответственно равны:

$$r_{2,n}(z)=Pr_1\left[f_{2,n}(z)\right], \tag{6}$$

$$r_{3,n}(z)=Pr_1\left[f_{3,n}(z)\right], \tag{7}$$

$$r_{4,n}(z)=Pr_1\left[f_{4,n}(z)\right].$$

Применяем непосредственно формулы (6) и (7), тогда

$$r_{2,n}(z)=\frac{2z}{p(z+4-3p+a)(z+3p-4-a)},$$

$$r_{3,n}(z)=\left(p^8(p-1)^3z^3+p^6(1-p)z^2+p^2z\right)\times\begin{bmatrix}\left(p^{12}z^4\right)(1-p)^5+p^9z^3\left(7p^2-20p+15\right)(p-1)^3+\\+p^6z^2(p-1)\left(11p^3-46p^2+66p-32\right)-\\-p^3z\left(15+10p^2-24p\right)+1\end{bmatrix}^{-1}.$$

Аналогично мы можем получить явное выражение и для $r_{4,n}(z)$.

*Утверждение 1*: Производящая функция для надежности решетки размерности $m\times n$ $r_{m,n}(z)$ есть функция, рациональная над кольцом полиномов $Q[z]$ ($p$ — рациональное).

Общий вид $r_{m,n}(z)$ следует непосредственно из теоремы 3. Остается доказать существование матрицы рекуррентных соотношений $A_{m,n}$.

Индукция по $m$: $m=1$ — очевидно. Пусть $m=k+1$ (для $m=k$ $A_{k,n}$ существует).

*Случай 1.* $n<k+1$. Учитывая симметричность данной структуры, применяем описанный ранее алгоритм к горизонтальным ребрам грида и доказывать больше нечего.

*Случай 2.* $n\geq k+1$. Снова применяем уже известный алгоритм. Имеем некоторое множество новых структур: $S_n^1,S_n^2,\ldots,S_n^l$. Если для любого $i$ надежность $S_n^i$ есть линейная комбинация надежностей структур из множества $S=\left\{L_{m,n-1},S_{n-1}^1,\ldots,S_{n-1}^i,\ldots,S_{n-1}^l\right\}$, то утверждение доказано (матрица $A_{m,n}$ будет иметь размерность $l+1$). В противном случае, после преобразования некоторой структуры $S_n^j$ (если такая $S_n^j$ не единственна, с остальными будем поступать аналогичным образом) мы получаем некоторое множество структур $S^{\bullet}$, не являющееся подмножеством $S$, т.е. появятся новые структуры $H_{n-1}^1,\ldots H_{n-1}^{j1}$. Применим известные преобразования к $H_n^1,\ldots H_n^{j1}$ и получим множество структур $S^{\bullet\bullet}$, которое уже возможно будет являться подмножеством множества $SU\left\{H_{n-1}^1,\ldots,H_{n-1}^{j1}\right\}$ (что повлечет увеличение размерности матрицы $A_{m,n}$ на $j_1$), если нет, продолжаем этот процесс и далее. Так как $n,m,l$ – конечны, то и число шагов данного алгоритма конечно.

**Теорема 4.** $r\left(L_{m,n}\right)=\left(A_{m,n}\right)^{n-1}\cdot S\cdot E$, где $E$ – единичная вектор-строка.

1. Colbourn C.J. The Combinatorics of Network Reliability. New York, 1987.
2. Tittmann P. Blechschmidt // EIK. 1991. Vol.27. №5/6. P.317.

Поступила в редакцию 26.09.97.

*УДК 513.83*

*Г.О.КУКРАК*

## МЕТРИКИ ХАУСДОРФА И СИММЕТРИЗУЕМОСТЬ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

It is proved in this article, that symmetrizability of exponent of $T_2$-space is equivalent to metrizability and compactness of this space. Then there is an example of uncountablecompact space, which exponent admit Δ-metric. Also it is proved, that equivalence of all Hausdorf's metrics on exponent of metric space is equivalent to compactness of this space.

Систематическое исследование метрических и топологических свойств множества exp$X$ замкнутых подмножеств топологического пространства $X$ восходит к работам Хаусдорфа [1] и Виеториса [2]. Одним из важнейших фактов теории экспоненциального пространства являются следующие утверждения:

1. Пространство exp$X$ (с топологией Виеториса) метризуемо тогда и только тогда, когда $X$ метризуемо и компактно.

2. Пространство exp$X$ нормально тогда и только тогда, когда $X$ хаусдорфово и компактно.

В предлагаемой работе в дополнение к названным фактам доказывается, что для хаусдорфова пространства $X$ симметризуемость exp$X$ эквивалентна тому, что $X$ метризуемо и компактно. Кроме того, показывается, что компактность метризуемого пространства $X$ равносильна эквивалентности всех возникающих на exp$X$ метрик Хаусдорфа (не обязательно априори согласованных с топологией Виеториса).

1. Начнем с необходимых определений и обозначений. Для топологического пространства $X$, множества $A\subset X$ и точки $x\in X$ обозначим через $\tau_x$, $\varphi_x$, $[A]_x$, int$_xA$, $\tau_x(x)$ соответственно топологию и семейство всех замкнутых подмножеств пространства $X$, замыкание и внутренность множества $A$ в $X$, семейство всех окрестностей точки $x$.

Неотрицательная функция $\rho(x,y)$ на множестве $X$ называется *о*-метрикой, если $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (см., напр., [5]). Скажем, что *о*-метрика согласована с топологией $\tau_x$ или допустима, если $U\in\tau_x \Leftrightarrow$ для любого $x\in U$ найдется $\varepsilon>0$ такое, что $B_\rho(x,\varepsilon)\subset U$, где $B_\rho(x,\varepsilon)=\{y\in X|\,\rho(x,y)<\varepsilon\}$. *О*-метрику $\rho$ назовем сильной, если $x\in \mathrm{int}B_\rho(x,\varepsilon)$ для любых $x\in X$, $\varepsilon>0$. *О*-Метрика $\rho$ называется симметрикой (Δ-метрикой), если $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (соответственно $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$) для любых $x,y,z\in X$. Отметим, что для *о*-метрики $\rho$ $\rho(x,x_n)\to 0 \Rightarrow x_n\to x$ в $\tau_x$, а в случае хаусдорфова $X$ верно и обратное. Заметим, что класс *о*-метризуемых пространств гораздо шире класса метризуемых пространств. Например, симметризуемое пространство может не быть хаусдорфовым и не удовлетворять первой аксиоме счетности. Однако известно (см. [5]), что хаусдорфово