x	$\Gamma_n(x)$			
	n=5	n=10	n=15	n=20
−0,95	−0,134189	−0,133550	−0,133523	−0,133562
−0,85	−0,198521	−0,197199	−0,197379	−0,197350
−0,65	−0,211584	−0,211989	−0,211938	−0,211969
−0,15	−0,060556	−0,061960	−0,061902	−0,061872
0,05	0,020340	0,020854	0,020832	0,020796
0,35	0,135516	0,137575	0,137632	0,137633
0,45	0,167712	0,169506	0,169677	0,169681
0,75	0,215969	0,215364	0,215338	0,215392
0,95	0,134189	0,133550	0,133523	0,133562

1. Шешко М.А., Расолько Г.А., Мастяница В.С. // Диф. уравнения. 1993. Т.29. № 9. С.1550.

Поступила в редакцию 24.04.97.

УДК 517.948.32:517.544

С.Л.ШТИН

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА ЯДРА КОШИ НА ЧЕТЫРЕХЛИСТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

It is constructed an analogue of Cauchy kernel for 4-sheeted Riemann manifold discribed by an equation. Some special bases (normal and complement) of the corresponding field of algebraic functions are found for it.

При решении краевых задач теории аналитических функций на римановых поверхностях необходимо иметь некоторый аналог ядра Коши, которое в случае плоскости имеет вид $\frac{d\tau}{\tau-z}$. Аналоги ядра Коши на римановых поверхностях можно построить, если известен некоторый нормальный базис поля алгебраических функций, соответствующего римановой поверхности. В связи с этим напомним некоторые определения и алгоритм построения фундаментального и нормального базисов в общей ситуации. Пусть риманова поверхность определяется уравнением

$$w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_n(z)=0,$$

где $a_i(z)$ — некоторые рациональные функции из $\mathbf{C}(z)$.

Рассмотрим конечное расширение полей $\mathbf{C}(z,w)\supset\mathbf{C}(z)$. Его базис $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ называется фундаментальным, если выполнены следующие условия:

1) все его элементы целые над $\mathbf{C}(z)$,

2) каждый целый над $\mathbf{C}(z)$ элемент представляется в виде

$$a_1(z)\omega_1+\ldots+a_n(z)\omega_n,$$

где $a_1(z)$ — некоторые многочлены.

Построение фундаментального базиса поля $\mathbf{C}(z,w)$ осуществляется следующим образом. Обозначим через $\Omega_{z=a_k}$ кольцо алгебраических функций, которые при $z=a_k$ принимают конечные значения. Пусть W образует вместе с z примитивную пару поля $\mathbf{C}(z,w)$, а $D(z)$ является дискриминантом степенного базиса $\{1,w,\ldots,w^{n-1}\}$. Известно [1], что элементы фундаментального базиса имеют вид:

$$\omega_k=\frac{c_{k0}(z)+c_{k1}(z)w+\ldots+c_{k,k-2}(z)w^{k-1}+w^k}{d_k(z)},\ k=0,1,\ldots,n-1,$$

где $d_k(z)$ являются делителями $D(z)$. Если $z-a_1,z-a_2,\ldots,z-a_s$ — линейные множители многочлена $D(z)$, то находят целые функции вида $\frac{c_{k0}(z)+c_{k1}(z)w+\ldots+w^k}{(z-a_v)^{\mu}}$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$, где μ — возможно более высокий показатель. Для этого функции $1,w,\ldots,w^{n-1}$ разлагаются по степеням $z-a_v$, а затем находятся такие комбинации этих функций, все разложения которых начинались бы с возможно более высоких степеней $z-a_\nu$. Это достигается с помощью следующего алгоритма. Пусть все разложения функции w (а с ней и $w^2,\dots,w^{n-1}$) распадаются на k циклов, и каждому циклу соответствуют общие знаменатели показателей $b_1,b_2,\dots,b_k$. При этом $b_1+b_2+\dots+b_k=n$. Каждому элементу базиса сопоставляется k чисел $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k$, где μ_i – наиболее низкий из показателей его разложения i-го цикла. Поэтому μ_i – некоторая дробь со знаменателем b_i, возможно сократимая. В силу целости элементов базиса все $\mu_i\geq 0$. Если для некоторого элемента все $\mu_i\geq 1$, то, разделив его на $z-a_\nu$, получим целый элемент, у которого все μ_i будут на единицу меньше. Таким образом, базис можно привести к такому виду, что среди показателей μ_i каждого его элемента хотя бы один будет меньше единицы. Если не для каждого цикла в базисе есть элемент с числом $\mu<1$, то для какого-то (i-го) цикла таких элементов будет больше b_i. Но так как значениями $\mu_i<1$ могут быть только числа

$$0,\frac{1}{b_i},\frac{2}{b_i},\dots,\frac{b_i-1}{b_i}, \qquad (1)$$

то в базисе будут два элемента с одним и тем же μ_i.

Один из элементов заменяется их линейной комбинацией так, чтобы в ней пропал член $(z-a_\nu)^{\mu_i}$. Тогда для комбинации значение μ_i повысится. После этого значения μ_i пересматриваются сначала, причем, если все $\mu_i\geq 1$, опять производится деление на $z-a_\nu$. После конечного числа шагов получаем базис, в котором для некоторого (i-го) цикла имеется b_i элементов с числами μ_i, совпадающими с системой (1). Пусть $i=1$ и $w_1,w_2,\dots,w_{b_1}$ – элементы базиса, для которых значения μ_i совпадают с системой (*). Прибавляя к остальным элементам базиса комбинации элементов $w_1,w_2,\dots,w_{b_1}$, умноженные на подходящие степени $z-a_\nu$, можно добиться того, чтобы значения μ_1 для остальных элементов базиса были сколь угодно велики. Продолжая процесс, можно разделить все элементы базиса на k категорий, в каждой из которых будет по $b_1,b_2,\dots,b_k$ элементов соответственно, причем для элементов i-ой категории значения μ_i будут равны числам (*). Полученный базис будет фундаментальным для кольца $\Omega_{z=a_\nu}$. Последовательно преобразуя базис относительно множителей $z-a_1,\dots,z-a_s$, получим фундаментальный базис кольца целых элементов поля $\mathbf{C}(z,w)$.

Если через Ω_1 обозначить кольцо целых элементов от $z_1=\dfrac{1}{z}$, то можно доказать следующее утверждение: всякий элемент y кольца Ω (целых элементов от z) можно умножением на некоторую степень $z_1^r=z^{-r}$ сделать элементом кольца Ω_1. Причем наименьшим таким значением является $r=\max\{k_1/1,k_2/2,\dots,k_n/n\}$, где k_i – степень многочлена i-го коэффициента целого уравнения для элемента y: $y^n+a_1(z)y^{n-1}+\dots+a_n(z)=0$ [1].

Это число r называется дробным показателем элемента y, а ближайшее к r справа целое число – целым показателем y.

Нормальный базис кольца Ω определяется следующим образом. В качестве первого элемента всегда выбирается $\lambda_1=1$; в качестве λ_2 берется целый элемент, не входящий в $\mathbf{C}(z)$, возможно более низкого показателя; в качестве λ_3 берем целый элемент, не представимый в форме $c_1\lambda_1+c_2\lambda_2$, $c_i\in\mathbf{C}(z)$, снова возможно более низкого показателя и т.д. Для показателей r_i элементов λ_i будет выполнено соотношение:

$$r_1=0,1\leq r_2\leq r_3\leq\dots\leq r_n.$$

Наконец, дополнительный базис $\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ для базиса $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ определяется равенствами $S_p(\lambda_i\mu_j)=\delta_{ij}(i,j=1,2,\dots,n, \delta_{ij}$ – символ Кронекера).

Рассмотрим теперь риманову поверхность, определяемую уравнением

$$w^4=(z^2-1)^3(z^2-a^2),\ a>1.$$

В нашем случае процедура построения нормального базиса значительно упрощается ввиду простоты алгебраического уравнения, которое является двучленным. Будет только один цикл.

Сначала преобразуем степенной базис в фундаментальный базис кольца $\Omega_{z=1}$. Решение уравнения $w^4=(z^2-1)^3(z^2-a^2)$ ищем в виде

$$w=\alpha(z-1)^{\varepsilon}+\alpha'(z-1)^{\varepsilon'}+\dots(\varepsilon<\varepsilon'<\dots).$$

Разлагаем по степеням $z-1$ многочлен $(z-1)^3(z+1)^3(z-a)(z+a)$:

$$8(1-a^2)(z-1)^3+ \text{младшие члены.}$$

Сравнивая младшие члены, находим:

$$(1-z)^3 8(1-a^2)+a^4(z-1)^{4\varepsilon}=0, \text{ откуда } \varepsilon=\frac{3}{4}, \alpha=\sqrt[4]{8(a^2-1)}.$$

Таким образом, $w=\sqrt[4]{8(a^2-1)}(z-1)^{3/4}+w_1$.

Тогда $w^2=\sqrt[4]{8(a^2-1)}^{\,2}(z-1)^{6/4}+\dots;\quad w^3=\sqrt[4]{8(a^2-1)}^{\,3}(z-1)^{9/4}+\dots$

Все члены в разложениях w^2 и w^3 имеют показатели >1, поэтому их нужно заменить на элементы

$$\frac{w^2}{z-1}=\sqrt[4]{64(a^2-1)^2}(z-1)^{2/4}+\dots \text{ и } \frac{w^3}{(z-1)^2}=\sqrt[4]{512(a^2-1)^3}(z-1)^{1/4}+\dots$$

У преобразованного базиса числа μ_i совпадают с системой

$$\left\{0,\frac{1}{b_i},\frac{2}{b_i},\dots,\frac{b_i-1}{b_i}\right\}=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right\}.$$

Точно так же преобразуем базис относительно множителя $z+1$.

В результате преобразований базис будет иметь вид

$$1, w, \frac{w^2}{(z-1)(z+1)}, \frac{w^3}{(z-1)^2(z+1)^2}.$$

Преобразование относительно множителя $z=a$ базис не изменит.

Действительно, пусть $w=\alpha(z-a)^{\varepsilon}+\alpha'(z-a)^{\varepsilon'}+\dots$, $w^4=\alpha^4(z-a)^{4\varepsilon}+\dots$; $(z^2-1)^3(z^2-a^2)=-(z-a)[2a(1+a)^3(a-1)^3+\dots]$.

Сравнивая младшие члены, получаем

$$\alpha^4(z-a)^{4\varepsilon}-(z-a)[2a(a-1)^3+\dots]=0.$$

Отсюда $\varepsilon=1/4$, $\alpha=\sqrt[4]{2a(a^2-1)^3}$, т.е.

$$w=\sqrt[4]{2a(a^2-1)^3}(z-a)^{\frac{1}{4}}+\dots,\quad w^2=\sqrt[4]{4a^2(a^2-1)^6}(z-a)^{\frac{2}{4}}+\dots,\quad w^3=\sqrt[4]{8a^3(a^2-1)^6}(z-a)^{\frac{3}{4}}+\dots$$

Таким образом, система чисел сразу совпадает с $\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right\}$ без дополнительных преобразований.

Аналогично, не меняет базиса и преобразование относительно точки $z=-a$. Итак, фундаментальный базис кольца целых элементов поля $\mathbf{C}(z,w)$ имеет вид:

$$\lambda_1=1, \lambda_2=w, \lambda_3=\frac{w^2}{(z-1)(z+1)}, \lambda_4=\frac{w^3}{(z-1)^2(z+1)^2}.$$

В нашем случае для показателей r_i базисных элементов λ_i имеем: $r_1=0$, $r_2=r_3=r_4=2$. Поэтому полученный базис является не только фундаментальным, но и нормальным.

Для определения дополнительного базиса $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, где $\mu_i = \sum_{j=1}^{4} e_{ji}\lambda_j$, нужно решить четыре системы линейных уравнений

$$\begin{cases} e_{1i}s_p(\lambda_1\lambda_1)+e_{2i}s_p(\lambda_2\lambda_1)+e_{3i}s_p(\lambda_3\lambda_1)+e_{4i}\ s_p(\lambda_4\lambda_1)=\delta_{1i}, \\ e_{1i}s_p(\lambda_1\lambda_{21})+e_{2i}s_p(\lambda_2\lambda_2)+e_{3i}s_p(\lambda_3\lambda_2)+e_{4i}\ s_p(\lambda_4\lambda_2)=\delta_{2i}, \\ e_{1i}s_p(\lambda_1\lambda_3)+e_{2i}s_p(\lambda_2\lambda_3)+e_{3i}s_p(\lambda_3\lambda_3)+e_{4i}\ s_p(\lambda_4\lambda_3)=\delta_{3i}, \\ e_{1i}s_p(\lambda_1\lambda_4)+e_{2i}s_p(\lambda_2\lambda_4)+e_{3i}s_p(\lambda_3\lambda_4)+e_{4i}\ s_p(\lambda_4\lambda_4)=\delta_{4i}, \end{cases}$$

где i=1,...4.

Дополнительный базис имеет вид:

$$\mu_1 = e_{11}\lambda_1 = \frac{1}{4};$$

$$\mu_2 = e_{42}\lambda_4 = \frac{1}{4(z^2-1)(z^2-a^2)}\frac{w^3}{(z^2-1)^2} = \frac{w^3}{4(z^2-1)(z^2-a^2)};$$

$$\mu_3 = e_{33}\lambda_3 = \frac{(z^2-1)^3}{4(z^2-a^2)}\frac{w^2}{(z^2-1)(z^2-1)^4} = \frac{w^2}{4(z^2-a^2)(z^2-1)^2};$$

$$\mu_4 = e_{24}\lambda_2 = \frac{w}{4(z^2-1)(z^2-a^2)}.$$

Поскольку базисы $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$ известны, рассмотрим дифференциальное выражение

$$K(\tau,s;z,w)d\tau = \sum_{k=1}^{4}\lambda_k(z,w)\mu_k(\tau,s)\frac{d\tau}{\tau-s}.$$

Легко проверяется, что $K(\tau,s;z,w)d\tau$ обладает свойствами, которыми должен обладать любой аналог ядра Коши на римановой поверхности, а именно:

$$1)\ K(\tau,s;z,w)d\tau \xrightarrow[(\tau,s)\to(z,w)]{} \frac{d\tau}{\tau-s};$$

$$2)\ K(\tau,s;z,w)d\tau \xrightarrow[\tau\to z,s\to w]{} O(1)d\tau.$$

Найденное ядро может быть, например, использовано при решении задачи о скачке: найти такую кусочно-аналитическую на поверхности $w^4=(z^2-1)^3(z^2-a^2)\backslash L$ функцию $\Phi(z,w)$, чтобы во всех точках замкнутого контура L выполнялось граничное условие $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t)$, $t(\tau,\varepsilon)\in L$. Решением этой задачи будет $\Phi(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau,s)K(\tau,s;z,w)d\tau$ [2].

1. Чеботарев Н.Г. Теория аналитических функций. М., 1948.

2. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т.XXVI. Вып.1.

Поступила в редакцию 10.07.97.