УДК 517.5

Х.ЮССЕФ (СИРИЯ)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЧЕРНЫХ И КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ

In this article the autor gives a new inequalities, which containe best approximation for the function $f\in L_2$, and the modul of continuity for this function. Also autor determine a Kolmogoroff diameter for a new class functions in space L_2.

Через $L_2=L_{2(0,2\pi)}$ обозначается пространство 2π-периодических измеримых функций, квадрат которых суммируем по Лебегу на $(0,2\pi)$ с нормой:

$$\|f\|=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\cos(kx+\varphi_k)$, где $(\rho_k\ge 0)$ – ряд Фурье функции $f(x)$.

Хорошо известно свойство минимальности частичных сумм этого ряда:

$$S_{n-1}(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

которое заключается в том, что наилучшее приближение $E_n(f)$ функции $f(x)$ в L_2 тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$

$$T_{n-1}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

реализуется на $S_{n-1}(f,x)$, т.е.

$$E_n(f)=\inf_{T_{n-1}}\|f-T_{n-1}\|=\|f-S_{n-1}\|=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь мы использовали равенство Парсеваля.

Говоря о функции $f(x)\in L_2$, у которой $f^{(r)}(x)\in L_2$, $(r=1,2,\dots)$ будем предполагать, что производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна.

Модуль непрерывности $\omega(f^{(r)},\delta)$ определяется равенством:

$$\omega(f^{(r)},\delta)=\sup_{|t|\le\delta}\|f^{(r)}(x+t)-f^{(r)}(x)\|;\quad r=0,1,2,\dots$$

В 1967 г. Н.И.Черных [4] доказал точное неравенство:

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^r}\left\{\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f^{(r)},t)\sin ntdt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

в котором n – любое натуральное число, а r – неотрицательное целое число. Это неравенство послужило отправным пунктом для многих работ (см., напр., [5]–[8]).

Каждое неравенство, имеющее вид

$$E_n^2(f)\le K\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f^{(r)},t)\psi_n(t)dt,$$

будем называть неравенством типа Черных.

В этой работе доказывается новое точное неравенство с $\psi_n(t)=\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}$.

Пусть $W\subset L_2$ – класс функций из пространства L_2, и пусть $L^N\subset L_2$ – некоторое подпространство пространства L_2 заданной размерности N. Величина

$$E_N(W)=\sup_{f\in W}\inf_{g\in L^N}\|f-g\|$$

называется наилучшим приближением класса W подпространством L^N в пространстве L_2.

Колмогоровский поперечник [1] класса W определяется равенством:

$$d_N(W)=\inf_{L^N}\sup_{f\in W}\inf_{g\in L^N}\|f-g\|,$$

где последний раз inf берется по всем подпространствам пространства L_2 размерности N.

Следуя [2], в работе определяется новый класс функции W^r_Φ с помощью некоторой мажорантной $\Phi(u)$ и вычисляются точные значения его поперечников. Наряду с колмогоровскими поперечниками в работе рассматриваются и другие поперечники, такие, как $b_N(W)$, $d^N(W)$, $\lambda_N(W)$, $\gamma_N(W)$ и $\Pi_N(W)$. Они обозначают, соответственно, поперечник по Бернштейну, по Гельфанду, непрерывный, линейный и проекционный поперечники. Их точные определения можно найти в [3].

Отметим следующее.

Предложение 1.[3] Пусть P_N – любой из перечисленных выше поперечников, и $d_{2n-1}(W)\le R$. Если шар размерности не меньше $2n+1$ содержится в классе W и имеет радиус R, то при $N=2n-1$ или $N=2n$ $b_N(W)\ge R$ и $P_N(W)=R$.

Теорема 1. Для любой функции $f(x)\in L_2$ и любого натурального n выполняется точное неравенство:

$$E_n^2(f)\le\frac{n^2}{\pi^2-4}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f,t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt, \tag{1}$$

которое обращается в равенство, например, для функции $f(x)=\cos nx$.

Доказательство. Из определения модуля непрерывности имеем

$$\omega^2(f,t)\ge2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(1-\cos kt)=2E_n^2(f)-2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cos kt,$$

откуда получаем

$$E_n^2(f)\le\frac{1}{2}\omega^2(f,t)+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cos kt.$$

Умножим обе части этого неравенства на вес $\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}>0$ $\left(0<t<\frac{\pi}{n}\right)$ и проинтегрируем по t

$$E_n^2(f)\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f,t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}\cos kt\,dt. \tag{2}$$

Так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}\cos kt\,dt=\frac{1-\cos\frac{k\pi}{n}}{k^2}\le\frac{2}{n^2},\qquad\forall k\ge n$$

и так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2},$$

то отсюда и из неравенства (2) получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}E_n^2(f)\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f,t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt+\frac{2}{n^2}E_n^2(f).$$

Откуда будем иметь неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}\right)E_n^2(f)\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f,t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt,$$

которое можно записать в виде

$$E_n^2(f)\le\frac{n^2}{\pi^2-4}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f,t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt.$$

Для функции $f_*(x)=\cos nx$ имеем

$$\omega^2(f_*,t)=2(1-\cos nt)$$

и

$$E_n^2(f_*)=1.$$

Вычисляя интеграл в правой части неравенства (1), находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f_*,t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt=\frac{\pi^2-4}{n^2}.$$

Отсюда уже видно, что неравенство (1) обращается в равенство для функции $f_*(x)$.

Следствие 1. Для любой функции $f(x)\in L_2$, $f^{(r)}(x)\in L_2$ и для любых натуральных n и r выполняется точное неравенство:

$$E_n^2(f)\le\frac{1}{n^{2r}}\frac{n^2}{\pi^2-4}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega^2(f^{(r)},t)\left\{\frac{\pi}{n}-t\right\}dt, \tag{3}$$

которое обращается в равенство, например для функции $f_*(x)=\cos nx$.

Пусть $\Phi(u)$ произвольная непрерывная возрастающая при $u>0$ функция: $\lim\limits_{u\to0}\Phi(u)=\Phi(0)=0$.

Употребляем обозначение

$$(1-\cos v)_*=\begin{cases}1-\cos v, & v<\pi,\\ 2, & v\ge\pi.\end{cases}$$

Предположим существование производной $f^{(r)}(x)\in L_2$ некоторого порядка $r\ge0$ и определим класс функций:

$$W_\Phi^r=\left\{f\in L_2:\int_0^u\omega^2(f^{(r)},t)\{u-t\}dt\le\Phi^2(u)\right\},$$

где функция $\Phi(u)$ $(u>0)$ удовлетворяет при любом $\lambda>0$ условию:

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\lambda}\right)\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*\{\pi\lambda-v\}dv\le\frac{\pi^2-4}{n^2}\Phi^2(u). \tag{4}$$

Теорема 2. Для любого натурального n выполняется равенство

$$P_N(W_\Phi^r)=\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{r-1}\left(\pi^2-4\right)^{1/2}},$$

где P_N — любой из поперечников b_N, d^N, d_N, γ_N, λ_N, Π_N и $N=2n$ или $N=2n-1$.

Доказательство. Из определения колмогоровского поперечника и из неравенства (3) получаем оценку сверху

$$d_{2n-1}(W_\Phi^r)\le\sup_{f\in W_\Phi^r}E_n(f)\le\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{r-1}\left(\pi^2-4\right)^{1/2}}. \tag{5}$$

Ниже мы покажем, что класс W_Φ^r содержит шар

$$S_{2n+1}=\left\{T_n(x):\|T_n\|^2\le\frac{\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{2r-2}\left(\pi^2-4\right)}\right\}.$$

Оценим модуль непрерывности $\omega(T_n^{(r)},t)$ произвольного тригонометрического полинома порядка n:

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k\cos(kx+\varphi_k).$$

Применяя равенство Парсеваля, можем написать

$$\left\|T_n^{(r)}(x+t)-T_n^{(r)}(x)\right\|^2=2\sum_{k=1}^{n}k^{2r}\rho_k^2(1-\cos kt)\le 2n^{2r}\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(1-\cos kt).$$

Так как

$$(1-\cos kt)\le(1-\cos nt)_*;\forall t>0,k\le n,$$

и так как

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2=\|T_n\|^2,$$

то

$$\left\|T_n^{(r)}(x+t)-T_n^{(r)}(x)\right\|^2\le 2n^{2r}\|T_n\|^2(1-\cos nt)_*.$$

Отсюда и из определения модуля непрерывности имеем:

$$\omega^2\left(T_n^{(r)},t\right)\le 2n^{2r}\|T_n\|^2(1-\cos nt)_*.$$

Пусть теперь $T_n(x)\in S_{2n+1}$. Тогда

$$\omega^2(T_n^{(r)},t)\le 2n^{2r}\frac{\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{2r-2}\left(\pi^2-4\right)}(1-\cos nt)_*=\frac{2n^2\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2-4}(1-\cos nt)_*.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\{u-t\}>0$ $(0<t<u)$ и проинтегрируем по t

$$\int_0^u\omega^2(T_n^{(r)},t)\{u-t\}dt\le\frac{2n^2\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2-4}\int_0^u(1-\cos nt)_*\{u-t\}dt.$$

Сделав замену $nt=v$, получим

$$\int_0^u\omega^2(T_n^{(r)},t)\{u-t\}dt\le\frac{2n\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2-4}\int_0^{nu}(1-\cos v)_*\left\{u-\frac{v}{n}\right\}dv.$$

Обозначим $\frac{\pi}{nu}=\frac{1}{\lambda}$ и воспользуемся условием (4), получаем:

$$\int_0^u\omega^2(T_n^{(r)},t)\{u-t\}dt\le\frac{2}{\pi^2-4}\Phi^2\left(\frac{u}{\lambda}\right)\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*\{\pi\lambda-v\}dv\le\Phi^2(u),$$

т.е. $T_n(x)\in W_\Phi^r$, и мы доказали включение $S_{2n+1}\subseteq W_\Phi^r$.

Отсюда и из неравенства (5) по предложению (1) имеем:

$$P_N(W_\Phi^r)=\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{r-1}\left(\pi^2-4\right)^{1/2}}.$$

Теорема 3. Для того чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*\{\pi\lambda-v\}dv \le \frac{\pi^2-4}{2}\lambda^\alpha \qquad (6)$$

с любым $\lambda>0$, необходимо и достаточно, чтобы α приняло значение $\alpha=\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}$.

Доказательство. Необходимость. Положим

$$\psi(\lambda)=\frac{\pi^2-4}{2}\lambda^\alpha-\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*\{\pi\lambda-v\}dv,$$

функция $\psi(\lambda)$ непрерывна по λ на $(0,\infty)$ и не меняет знак на этом интервале ($\psi(\lambda)\ge 0$, $\forall\lambda>0$). Кроме того, $\psi(1)=0$, поэтому производная от функции $\psi(\lambda)$ должна принять в точке $\lambda=1$ значение нуль, т.е. $\psi'(1)=0$, и так как $\psi'(\lambda)=\frac{\pi^2-4}{2}\alpha\lambda^{\alpha-1}-\pi\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_* dv$, то $\psi'(1)=\frac{\pi^2-4}{2}\alpha-\pi^2$, отсюда уже видно, что $\psi'(1)=0$, когда $\alpha=\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}$.

Достаточность. Покажем, что неравенство

$$\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*\{\pi\lambda-v\}dv \le \frac{\pi^2-4}{2}\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}$$

выполняется с любым $\lambda>0$.

Для $0<\lambda\le 1$ это неравенство примет вид:

$$\frac{\pi^2\lambda^2}{2}+\cos\pi\lambda-1\le\frac{\pi^2-4}{2}\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}.$$

Так как $\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}<4$, то это неравенство имеет место в малой окрестности нуля. Обозначим через $\psi(\lambda)$ разность обоих частей неравенства

$$\psi(\lambda)=\frac{\pi^2-4}{2}\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}-\frac{\pi^2\lambda^2}{2}-\cos\pi\lambda+1,$$

тогда в малой окрестности нуля имеем $\psi(\lambda)>0$. Если бы функция $\psi(\lambda)$ сменила знак на интервале $(0,1)$, то, поскольку $\psi(0)=\psi(1)=0$, функция

$$\psi'(\lambda)=\pi^2\lambda^{\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}}-\pi^2\lambda+\pi\sin\pi\lambda$$

имела бы не менее двух нулей на интервале $(0,1)$. И так как $\psi'(0)=\psi'(1)=0$, то функция

$$\psi''(\lambda)=\pi^2\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}\lambda^{\frac{8}{\pi^2-4}}-\pi^2+\pi^2\cos\pi\lambda$$

имеет не менее трех нулей на интервале $(0,1)$, кроме того, $\psi''(0)=0$ и

$$\psi''(1)=\pi^2\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}-2\pi^2=\pi^2\frac{12-\pi^2}{\pi^2-4}>0.$$

Значит, на интервале $(0,1)$ существуют три нуля функции

$$\psi'''(\lambda)=\pi^2\left(\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}\right)\left(\frac{8}{\pi^2-4}\right)\lambda^{\frac{12-\pi^2}{\pi^2-4}}-\pi^3\sin\pi\lambda.$$

Кроме того, $\psi'''(0)=0$. Откуда, следовательно, существуют четыре нуля функции

$$\psi^{(4)}(\lambda)=\pi^2\left(\frac{\pi^2+4}{\pi^2-4}\right)\left(\frac{8}{\pi^2-4}\right)\left(\frac{12-\pi^2}{\pi^2-4}\right)\lambda^{\frac{16-2\pi^2}{\pi^2-4}}-\pi^4\cos\pi\lambda$$

на интервале (0,1). И так как $\psi^{(4)}(\lambda)>0$ на интервале $\left(\frac{1}{2},1\right)$, то существуют четыре нуля функции $\psi^{(4)}(\lambda)$ на полуинтервале $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, что невозможно, поскольку на этом полуинтервале функция $\psi^{(4)}(\lambda)$ есть разность между выпуклой сверху и выпуклой снизу функциями и, значит, $\psi^{(4)}(\lambda)$ не может иметь больше двух нулей на этом полуинтервале. Мы пришли к противоречию.

Для $\lambda>1$ неравенство (6) примет вид

$$\int_0^\pi (1-\cos v)\{\pi\lambda - v\}dv + 2\int_\pi^{\pi\lambda}\{\pi\lambda - v\}dv \le \frac{\pi^2-4}{2}\lambda^\alpha. \tag{7}$$

Вычисляем интегралы в левой части неравенства

$$\int_0^\pi (1-\cos v)\{\pi\lambda-v\}dv+2\int_\pi^{\pi\lambda}\{\pi\lambda-v\}dv=\int_0^\pi\{\pi\lambda-v\}d(v-\sin v)+2\left[\pi\lambda v-\frac{v^2}{2}\right]_\pi^{\pi\lambda}=$$

$$=\left[\{\pi\lambda-v\}(v-\sin v)\right]_0^\pi+\int_0^\pi(v-\sin v)dv+2\left[\pi^2\lambda^2-\frac{\pi^2\lambda^2}{2}-\pi^2\lambda^2+\frac{\pi^2}{2}\right]=$$

$$=\pi^2\lambda-\pi^2+\left[\frac{v^2}{2}+\cos v\right]_0^\pi+\pi^2\lambda^2-2\pi^2\lambda+\pi^2=\pi^2\lambda-\pi^2+\frac{\pi^2}{2}-2+\pi^2\lambda^2-2\pi^2\lambda+\pi^2=$$

$$=\pi^2\lambda^2-\pi^2\lambda+\frac{\pi^2-4}{2}.$$

Таким образом, неравенство (7) эквивалентно неравенству:

$$\pi^2\lambda^2-\pi^2\lambda+\frac{\pi^2-4}{2}\le\frac{\pi^2-4}{2}\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}.$$

Обозначим через $\psi(\lambda)$ разность обеих частей последнего неравенства, т.е.

$$\psi(\lambda)=\frac{\pi^2-4}{2}\left(\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}-1\right)-\pi^2\lambda^2+\pi^2\lambda,$$

и докажем, что $\psi(\lambda)\ge0\ \forall\lambda>1$.

Так как

$$\psi'''(\lambda)=\pi^2\left(\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-1\right)\left(\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-2\right)\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-3}>0;\quad\forall\lambda>1,$$

то функция

$$\psi''(\lambda)=\pi^2\left(\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-1\right)\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-2}-2\pi^2$$

возрастет по $\lambda>1$. Откуда

$$\psi''(\lambda)>\psi''(1)=\pi^2\left(\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-1\right)-2\pi^2=\pi^2\frac{12-\pi^2}{\pi^2-4}>0.$$

Значит,

$$\psi'(\lambda)=\pi^2\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}-1}-2\pi^2\lambda+\pi^2$$

есть возрастающая при $\lambda>1$ функция и поэтому $\psi'(l)>\psi'(1)=0$.

Следовательно, функция $\psi(\lambda)$ возрастет при $\lambda>1$ и так как $\psi(1)=0$, то $\psi(l)>0\ \forall\lambda>1$.

Теорема 3 доказана.

Определим класс W_u^r равенством:

$$W_u^r = \left\{ f \in L_2 : \int_0^u \omega^2(f^{\omega}, t)\{u - t\} dt \le u^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}} \right\}; \quad r = 0,1,2,\ldots$$

Следствие. Для любого натурального n выполняется равенство:

$$P_N(W_u^r) = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}}}{n^{r-1}(\pi^2-4)^{1/2}},$$

где P_N — любой из поперечников b_N, d^N, d_N, γ_N, λ_N, π_N и N=2n или N=2n−1.

Доказательство. Если положить $\Phi^2(u) = u^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}$, то из теоремы 3 следует, что неравенство (4) выполнено. Это вытекает из теоремы 2.

1. Колмогоров А.Н. Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funkionklassen, Ann. of Math., 37 (1936). P.107.
2. Тайков Л.В. // Мат. заметки. 20. №3 (1976). С.433.
3. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
4. Черных Н.И. // Мат. заметки. 2. №5 (1967). С.513.
5. Юссеф Х. Некоторые аппроксимативные свойства периодических функций в пространстве L_2: Автореф. канд. дис. Мн., 1989.
6. Бабенко А.Г. // Мат. заметки. 60. №3. С.333.
7. Иванов В.И., Смирнов О.И. // Там же. 60. №3. С.390.
8. Mayyada Shikh Othman. N-Widths of some classes of functions in L_2. Dis., Univ. Of Aleppo, Faculty of sciences, 1996.

Поступила в редакцию 24.04.97.

УДК 517.948

В.С.МАСТЯНИЦА, Д.С. ШУЛЯЕВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

A method for approximate solution of complete Prandtl's singular integrodifferential equation is described. The algorithm is based on the use of quadrature rules for the integrals of equation with logarithmic singularity, being equivalent to Prandtl's equation. Secondly, the convergence rate is obtained and one numerical example is given.

Рассмотрим обобщенное интегродифференциальное уравнение Прандтля

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt + \int_{-1}^{1}K(x,t)\Gamma(t)dt = f(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{1}$$

где $\Gamma(x)$ – искомая функция, $B(x)$, $f(x)$ – известные функции из класса $C[-1,1]$, а функция $K(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным. Поставим граничную задачу для уравнения (1) – наложим на $\Gamma(x)$ условия

$$\Gamma(1)=\beta,\ \Gamma(-1)=\alpha. \tag{2}$$

В настоящей статье предлагается и обосновывается вычислительная схема для задачи (1), (2), являющаяся развитием подхода М.А.Шешко [1]. Схема основана на применении квадратурных формул к интегралам, входящим в уравнение с логарифмической особенностью, которое равносильно исходной задаче (1), (2). Эти формулы строятся путем интерполирования решения уравнения с логарифмической особенностью по узлам Чебышева первого рода.

Обозначая

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = u(x), \tag{3}$$