$$\int_0^T \left(\frac{d^2h}{dt^2} + B_{1\varepsilon}^* \frac{dh}{dt} + B_{2\varepsilon}^* h, w \right)_H dt + \int_0^T (h, Aw)_H dt = 0, \tag{18}$$

где $w = A_\varepsilon^{-1} v, B_{1\varepsilon}^* = -\varepsilon A' A_\varepsilon^{-1}$ и $B_{2\varepsilon}^* = \left[-\varepsilon A'' A_\varepsilon^{-1} + 2\varepsilon^2 (A' A_\varepsilon^{-1})^2 \right]$.

Вводя интегральные операторы вида

$$G_1(v) = \int_0^t v(\tau) d\tau - \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2} \int_0^T v(\tau) d\tau,$$

$$G_2(v) = \int_0^t (t-\tau) v(\tau) d\tau + \overline{\mu}_3 \left[\frac{\overline{\mu}_1 T - t(\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2)}{(\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2)(\overline{\mu}_3 + \overline{\mu}_4)} \right] \int_0^T v(\tau) d\tau - \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2} \int_0^T (T-\tau) v(\tau) d\tau,$$

производя интегрирование по частям и переходя к сопряженным операторам в равенстве (18), получаем равенство

$$\int_0^T \left(\frac{d^2h}{dt^2}, w - G_1(B_{1\varepsilon} w) + G_2(B_{2\varepsilon} w + Aw) \right)_H dt = 0,$$

из которого следует, что функция удовлетворяет следующей однородной задаче

$$\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{d}{dt}(B_{1\varepsilon} w) + B_{2\varepsilon} w + Aw = 0, \tag{19}$$

$$\overline{\mu}_2 w(0) + \overline{\mu}_1 w(T) = 0, \overline{\mu}_4 \frac{dw(0)}{dt} + \overline{\mu}_3 \frac{dw(0)}{dt} = 0. \tag{20}$$

Используя аналогичную методику, как и при доказательстве неравенства (11), для задачи (19), (20) получаем априорную оценку

$$\sup_{0 \le t \le T} |v(t)|_H^2 \le C^* \int_0^T \left| \varepsilon A A_\varepsilon^{-1} v(t) \right|_H^2 dt,$$

где $C^*>0$ не зависит от v и ε. Устремляя $\varepsilon \to +0$, получаем $v \equiv 0$, что и доказывает теорему.

Теорема 3. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда если $\mu(n) \to \mu 0$ (т.е. $\mu_i(n) \to \mu_i$, $i=1-4$) при $n \to \infty$, то $\left(\overline{L}_{\mu(n)}\right)^{-1} \to \left(\overline{L}_{\mu_0}\right)^{-1}$ в пространстве $\mathsf{L}(F, E)$, наделенном топологией простой сходимости.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в [4].

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. С.133.
2. Бриш Н.И., Юрчук Н.И. // Диф. уравнения. 1971. Т.7. №6. С.1017.
3. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. С.23.
4. Чесалин В.И. // Диф. уравнения. 1977. Т.13. №3. С.475.

Поступила в редакцию 15.05.97.

УДК 517.944

МУСА АБАБНА (ИОРДАНИЯ)

РЕГУЛЯЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider a control initial condition problem for evolution differential-operator equations which is non-correct in sense of Hadamar-Petrovski. It is solved with help of a regularization of the initial conditions by non-local conditions.

1. Пусть на отрезке $(0, T)$ задано дифференциально-операторное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \tag{1}$$

где u – функция переменной $t \in [0, T]$, принимающая значения в гильбертовом пространстве H; A – самосопряженный положительно определенный оператор в H.

Известно, что уравнение (1) при начальном условии

$$u(0)=\xi,\ \xi\in H, \tag{2}$$

имеет единственное сильно обобщенное решение $u(t;\xi)$, которое является непрерывной функцией по t со значением в H. Если (2) $\xi\in D(A^{1/2})$, то решение $u(t;\xi)$ является непрерывной функцией по t со значением в $D(A^{1/2})$ и удовлетворяет уравнению почти везде.

Рассмотрим следующую задачу управления. Требуется для заданных $T>0$ и элемента $\chi\in H$ минимизировать функционал

$$J(\xi)=\|u(T;\xi)-\chi\|^2,\quad \xi\in H, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в H. Если элементы $\chi\in D(A^{1/2})$, то вместо минимизации функционала (3) будем исследовать задачу минимизации функционала

$$J_1(\xi)=\|u(T;\xi)-\chi\|_1^2,\quad \xi\in D(A^{1/2}), \tag{4}$$

где $\|g\|_1=\|A^{1/2}g\|,\quad g\in D(A^{1/2})$.

"Идеальным" решением поставленной задачи было бы положить $\xi=u(0)$, где $u(t)$ – "решение" уравнения (1) при условии $u(T)=\chi$ вместо начального условия (2). Однако задача с обратным направлением времени для эволюционного уравнения (1) не является корректной.

Для решения поставленной задачи в [1] разработан метод квазиобращения. По своей идее данный метод восходит к методу регуляризации А.Н.Тихонова и состоит в замене эволюционного оператора регуляризованным оператором $P_\alpha=\dfrac{d}{dt}+A-\alpha A^2$, $\alpha>0$, корректным для обратного направления времени.

В данной работе вместо регуляризации эволюционного оператора предлагается регуляризация рассматриваемой задачи нелокальными условиями. Суть ее заключается в следующем. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{dv}{dt}+Av=0 \tag{5}$$

с нелокальными граничными условиями

$$\alpha v(0)+(1-\alpha)v(T)=\chi,\ 0<\alpha<1. \tag{6}$$

Задача (5), (6) при $\chi\in H$ будет иметь сильно обобщенное решение $v(t;\chi,\alpha)$, которое является непрерывной функцией по $t\in[0,T]$ со значением в H. Если в (6) $\chi\in D(A^{1/2})$, то решение $v(t;\chi,\alpha)$ является непрерывной функцией по $t\in[0,T]$ со значением в $D(A^{1/2})$ и удовлетворяет условию (5) почти везде. Положим $\xi_\alpha=v(0;\chi,\alpha)$. Тогда при выбранном ξ_α решение задачи (1), (2) $u(t;\xi_\alpha)=v(t;\chi,\alpha)$

$$\lim_{\alpha\to0}J(\xi_\alpha)=\lim_{\alpha\to0}\|u(T;\xi_\alpha)-\chi\|=\lim_{\alpha\to0}\|v(T;\chi,\alpha)-\chi\|=0,\quad \chi\in H, \tag{7}$$

$$\lim_{\alpha\to0}J_1(\xi_\alpha)=\lim_{\alpha\to0}\|u(T;\xi_\alpha)-\chi\|_1=\lim_{\alpha\to0}\|v(T;\chi,\alpha)-\chi\|_1=0,\quad \chi\in D(A^{1/2}). \tag{8}$$

2. Изучим задачу (5), (6). Не ограничивая общности рассуждений, здесь и в дальнейшем будем предполагать, что спектр оператора A дискретен.

Определение. Функция $v=v(t;\chi,\alpha)$ называется сильно обобщенным в $C([0,T],H)$ решением задачи (5), (6), если существует последовательность функций $v_n\in C^1([0,T],H)\cap C([0,T],D(A))$ такая, что

$$\frac{dv_n}{dt}+Av_n=0, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\|v_n(t)-v(t;\chi,\alpha)\|=0, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\alpha v_n(0)+(1-\alpha)v_n(T)-\chi\|=0. \tag{11}$$

Теорема 1. Если $\chi\in H$, то существует единственное сильно обобщенное в $C([0,T],H)$ решение $v(t;\chi,\alpha)$ задачи (5), (6).

Доказательство. Оператор A имеет счетное множество положительных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ и полную в H систему ортонормальных собственных векторов $\{w_k\}_{k\geq 1}$. Вектор $\chi \in H$ представим в виде

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k, \quad c_k = (w_k, \chi), \tag{12}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H. Решение $v(t;\chi,\alpha)$ уравнения (5) будем искать в виде

$$v(t;\chi,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k t} w_k. \tag{13}$$

Подставляя это выражение в условие (6) и воспользовавшись представлением (12), найдем значения $\varphi_k = \left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} c_k$.

Подставляя значения φ_k в (13), получим

$$v(t;\chi,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} (w_k,\chi) e^{-\lambda_k t} w_k. \tag{14}$$

Покажем, что ряд (14) является сильно обобщенным в $C([0,T],H)$ решением задачи (5), (6). В качестве последовательности v_n из определения возьмем последовательность частичных сумм

$$v_n(t;\chi,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} (w_k,\chi) e^{-\lambda_k t} w_k. \tag{15}$$

Функции $v_n \in C^1([0,T],H) \cap C([0,T],D(A))$ и удовлетворяют уравнению (9), так как этими свойствами обладает каждое слагаемое конечной суммы (15). Так как

$$\alpha v_n(0) + (1-\alpha) v_n(T) = \sum_{k=1}^{n} (w_k,\chi),$$

то в силу (12) выполняется (11). Далее, поскольку

$$\left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} \leq \frac{1}{\alpha}, \tag{16}$$

то

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left\| \sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t} \left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} (w_k,\chi) w_k \right\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=m}^{m+p} (w_k,\chi)^2$$

и ряд (14) сходится в норме пространства $C([0,T],H)$ непрерывных на $[0,T]$ функций, принимающих значения в H. Следовательно, выполняется (10), так как v_n есть частичные суммы ряда (14).

Единственность решения следует из полноты в H системы собственных векторов $\{w_k\}_{k\geq 1}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\chi \in D(A^{1/2})$, то решение $v(t;\chi,\alpha)$ является непрерывной функцией по $t \in [0,T]$ со значением в $D(A^{1/2})$ и удовлетворяет уравнению (5) почти везде.

Доказательство. Если $\chi \in D(A^{1/2})$, то из (12) следует равенство

$$\|\chi\|_1^2 = \left\|A^{1/2}\chi\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (w_k,\chi)^2. \tag{17}$$

В силу неравенства (16) справедливы оценки

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left\| \sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t} \left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1} (w_k,\chi) w_k \right\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=m}^{m+p} \lambda (w_k,\chi)^2, \tag{18}$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left\|\sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t}\left[\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1}(w_k,\chi)w_k\right\|^2 dt \le \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{k=m}^{m+p}\lambda(w_k,\chi)^2, \quad (19)$$

$$\int_0^T \left\|A\sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t}\left[\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}\right]^{-1}(w_k,\chi)w_k\right\|^2 dt \le \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=m}^{m+p}\lambda(w_k,\chi)^2. \quad (20)$$

На основании равенства (17) из (18) заключаем, что функция $v(t;\chi,\alpha)$ является непрерывной по $t\in[0,T]$ со значением в $D(A^{1/2})$, а из (19) и (20) следует, что $v(t;\chi,\alpha)$ удовлетворяет условию (5) почти везде. Теорема доказана.

3. Перейдем к задаче (1), (2). Положим в (2) $\xi=\xi_\alpha=v(0;\chi,\alpha)$. При выбранном ξ_α в силу единственности решения задачи (1), (2) $u(t;\xi_\alpha)=v(t;\chi,\alpha)$.

Теорема 3. Пусть $\chi\in H$. Тогда справедливо соотношение (7).

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\chi-u(T;\xi_\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}-e^{-\lambda_k T}}{\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}}(w_k,\chi)w_k. \quad (21)$$

Для всех $\alpha\in[0,T]$ величина

$$\frac{\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}-e^{-\lambda_k T}}{\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}}=\frac{\alpha(1-e^{-\lambda_k T})}{\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_k T}} \quad (22)$$

неотрицательна и не убывает по α, так как ее производная по α неотрицательна. Величина (22) принимает наибольшее значение при $\alpha=1$, которое не превосходит 1. Поэтому равномерно на $\alpha\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\|\chi-u(T;\xi_\alpha)\|^2\le\|\chi\|^2. \quad (23)$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\|\chi-u(T;\xi_\alpha)\|^2=0,\quad \forall\chi\in M, \quad (24)$$

где M — некоторое плотное в H множество. Тогда из (23) и (24) в силу теоремы Банаха–Штейнгауза следует (7). В качестве M возьмем все χ, представимые в виде (см.(12))

$$\chi=\sum_{k=1}^{N}c_k w_k=\sum_{k=1}^{N}(w_k,\chi)w_k,\quad \forall N<\infty. \quad (25)$$

Тогда

$$\|\chi-u(T;\xi_\alpha)\|^2=\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha^2(1-e^{-\lambda_k T})^2}{\alpha+(1-e^{-\lambda_k T})^2}(w_k,\chi)^2\le\frac{\alpha^2e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2}\sum_{k=1}^{N}(w_k,\chi)^2\le\frac{\alpha^2e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2}\|\chi\|^2 \quad (26)$$

и, следовательно, выполняется (24). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $\chi\in D(A^{1/2})$. Тогда справедливо соотношение (8).

Доказательство. Аналогично, как и (23), устанавливается оценка

$$\|\chi-u(T;\xi_\alpha)\|_1^2\le\|\chi\|_1^2. \quad (27)$$

На основании (27) и того, что для $\chi\in M$ (см. (25) и (26))

$$\|\chi-u(T;\xi_\alpha)\|_1^2=\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha^2(1-e^{-\lambda_k T})^2}{\alpha+(1-e^{-\lambda_k T})^2}\lambda_k(w_k,\chi)^2\le\frac{\alpha^2e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2}\lambda_k(w_k,\chi)^2\le\frac{\alpha^2e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2}\|\chi\|^2\xrightarrow[\alpha\to 0]{}0,$$

заключаем в силу теоремы Банаха–Штейнгауза, что справедливо соотношение (8). Теорема доказана.

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.

Поступила в редакцию 24.09.97.