$$
=\sum_{i\in I} y_i\Big(\sum_{j\in I_i^+(U)}\chi_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)}\chi_{ji}\Big)-\sum_{(i,j)\in U}\delta_{ij}\chi_{ij}-\sum_{i\in I^*} y_i\mathrm{sign}[i]\chi_i+\sum_{i\in I^*}\sum_{k=1}^{l}\alpha_i{}^k g_k\chi_i-\sum_{i\in I^*}\delta_i\chi_i=
$$

$$
=\sum_{i\in I^C} a_i y_i+\sum_{k=1}^{l} b_k g_k+\sum_{i\in I^*} a_{*i}v_i-\sum_{i\in I^*} a_i{}^* t_i-\sum_{(i,j)\in U} d_{ij}w_{ij}.
$$

Необходимость. Пусть δ^0 – оптимальный невырожденный копоток, построенный по оптимальному двойственному плану $y^0=(y_i^0, i\in I;\ g_k^0, k=\overline{1,l};\ v_i^0, t_i^0, i\in I^*;\ w_{ij}^0,(i,j)\in U)$. Согласно теории двойственности существует оптимальный потокоплан $x^0=(x_{ij}^0,(i,j)\in U; x_i^0, i\in I^*)$ задачи (1)–(4) и пара x^0, y^0 удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости, где:

$$
\begin{gathered}
x_{ij}^0(y_i^0-y_j^0-w_{ij}^0-c_{ij})=0,\ w_{ij}(x_{ij}^0-d_{ij})=0,(i,j)\in U;\\
x_i^0(-y_i^0\mathrm{sign}[i]+\sum_{k=1}^{l} a_i^k g_k^0-t_i^0+v_i^0-c_i)=0;\\
t_i(x_i^0-a_i^*)=0,\ v_i(a_{*i}-x_i^0),\ i\in I^*.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Из условий согласования (8) и соотношений (12) для неопорных дуг и узлов имеем:

$x_{ij}{}^0=0$, если $\delta_{ij}{}^0<0$; $x_{ij}{}^0=d_{ij}$, если $\delta_{ij}{}^0>0$;

$x_{ij}{}^0=a_{*i}$, если $\delta_i{}^0<0$; $x_{ij}{}^0=a_i{}^*$, если $\delta_i{}^0>0$.

Поскольку опорные компоненты вектора x^0 однозначно вычисляются из (2),(3) по заданным неопорным компонентам вектора x^0, то заключаем, что $x^0=\chi$. Соотношения (11) справедливы для опорных компонент вектора x^0 в силу условий дополняющей нежесткости (12) и ограничений задачи (1)–(4). Теорема доказана.

1. Пилипчук Л.А., Командина Л.В. // Numerical Methods and Applications: Proceeding of the International Methods and Applications. Sofia, 1989. P.370.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 17.02.97.

УДК 519.2

М.С.АБРАМОВИЧ

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТА "РАЗЛАДКИ" ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

The problem of asymptotic analysis of power of criterion, which is based on spectral density estimators, is investigated for disorder detection test in time series.

Для обнаружения моментов "разладки" временных рядов широко используются методы, основанные на модели авторегрессии и скользящего среднего [1], и метод кумулятивных сумм [2]. В меньшей мере для решения этой проблемы исследовано применение методов спектрального анализа [3].

В [4] построен критерий для обнаружения момента "разладки" с использованием оценок спектральных плотностей, найдено асимптотическое распределение статистики критерия и построен тест для обнаружения момента "разладки". В настоящей работе исследуется мощность этого теста.

1. Математическая модель. Пусть ξ_t, $t\in Z$ – стационарный временной ряд с нулевым средним и некоторой спектральной плотностью $S_1^0(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$, η_t, $t\in Z$ – стационарный временной ряд с нулевым средним и некоторой другой спектральной плотностью $S_2^0(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$, отличной от $S_1^0(\cdot)$: $S_1^0(\cdot)\neq S_2^0(\cdot)$. Наблюдаемый временной ряд $X=\{x_t: t=1,2,\dots,T\}$ длительностью T имеет "разладку" в неизвестный момент времени $t_0\in\{\tau_-,\tau_-+1,\dots,\tau_+,T+1\}$, которая порождается "скачкообразным изменением" спектральной плотности:

$$x_t = \begin{cases} \xi_\tau, t \in \{1,2,\ldots,t_0-1\}, \\ \eta_\tau, t \in \{t_0, t_0+1,\ldots,T\}; \end{cases}$$

$1<\tau_-<\tau_+<T$ – некоторые априорно заданные граничные значения.

Если $t_0=T+1$, то наблюдаемый временной ряд – однородный.

Задача обнаружения "разладки" заключается в оценивании момента "разладки" t_0. Для $\tau\in\{\tau_-,\tau_-+1,\ldots,\tau_+\}$ осуществим разбиение наблюдаемого временного ряда X на два фрагмента $X_1=(x_1,\ldots,x_{\tau-1})$, $X_2=(x_\tau,\ldots,x_T)$ с длинами T_1 и T_2 соответственно:

$$X=(X_1:X_2),\ T_1=\tau-1,\ T_2=T-\tau+1,\ T_1+T_2=T.$$

Определим гипотезу $H_{1\tau}:t_0=\tau$, означающую, что наблюдаемый временной ряд имеет "разладку" в момент τ, и гипотезу $H_{0\tau}:t_0=T+1$, означающую, что наблюдаемый временной ряд – однородный.

Оценка спектральной плотности по j-му фрагменту запишется в виде [6]:

$$\hat{S}_j(f_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(T_j-1)}^{T_j-1} W^*_{kT_j} \hat{R}_j(k)\cos(f_i k), \quad j=1,2, \tag{1}$$

где $i\in\{1,\ldots,m\}$ — номер частоты, m – число частот $f_1,\ldots,f_m$, для которых вычисляются оценки спектральной плотности, $\hat{R}_j(k)$ – значение выборочной ковариационной функции для лага k:

$$\hat{R}_j(k) = \frac{1}{T_j} \sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_{j-1}+T_j-k} x_t x_{t+k} \ (T_0::=0),$$

$$W^*_{kT_j} = \begin{cases} r\left(\dfrac{k}{K_{T_j}}\right), k=0,\pm1,\ldots,\pm K_{T_j}, \\ 0, k=\pm(K_{T_j}+1),\ldots,\pm(T_j-1), \end{cases} \tag{2}$$

$r(x)$ – весовая функция, $K_{T_j}\in N$ – параметр сглаживания, $K_{T_j}<T_j$. В соответствии с [6] введем параметр h:

$$h = \lim_{x\to 0} \frac{1-r(x)}{|x|^q},\ q>0. \tag{3}$$

Обозначим:

$$U=(u_k)\in R^{2m},\ u_k=\hat{S}_1(f_k),\ u_{m+k}=\hat{S}_2(f_k),$$

$$U^0=(u_k^0)\in R^{2m},\ u_k^0=S_1^0(f_k),\ u_{m+k}^0=S_2^0(f_k),\ k=\overline{1,m},$$

$$Q=\int_{-1}^{1} r^2(x)dx.$$

Определим статистику для обнаружения момента "разладки" как меру различия выборочных спектральных плотностей $\hat{S}_1(\cdot)$ и $\hat{S}_2(\cdot)$:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^{m}(u_{m+k}-u_k)^2}{\sum_{k=1}^{m}(u_{m+k}^2+u_k^2)}. \tag{4}$$

В [4] построен спектральный критерий обнаружения момента "разладки" в момент τ:

$$\text{принимается:} \begin{cases} H_{0\tau}, \text{если } G<\Delta, \\ H_{1\tau}, \text{если } G\geq\Delta, \end{cases} \tag{5}$$

где $\Delta=\Delta(\varepsilon)$ – пороговое значение, соответствующее заданному уровню значимости $\varepsilon\in(0,1)$.

2. Асимптотический анализ мощности критерия. Для исследования мощности спектрального критерия обнаружения "разладки" (4), (5) найдем асимптотическое при $T_1, T_2\to\infty$ распределение вспомогательной статистики

$$\widetilde{G}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(u_{m+k}-u_k)^2}{\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^0\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)}. \qquad (6)$$

Для оценки мощности критерия воспользуемся следующей леммой, доказательство которой приведено в [5].

Лемма. Пусть случайный k-вектор $X_n=(X_{n1},\dots,X_{nk})$ при $n\to\infty$ асимптотически распределен по нормальному закону $N_k(\mu, b_n^2\Sigma)$, где μ – математическое ожидание, Σ – ковариационная матрица и $b_n^2\to 0$. Пусть $g(x)$, $x=(x_1,\dots,x_k)$ – функция, имеющая ненулевой k-вектор частных производных в точке $x=\mu$: $D=\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\Big|_{x=\mu}, (i=1,k)$. Тогда асимптотическое распределение статистики $Y_n=g(X_n)$ есть $N_1\left(g(\mu), b_n^2 D^T\Sigma D\right)$.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия ($j=1,2$):

1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|R_j(k)|<\infty$, где $R_j(k)$ – ковариационная функция временного ряда;

2) $\sum_{k,s,t=-\infty}^{\infty}|\kappa_j(k,s,t)|<\infty$, где $\kappa_j(k,s,t)$ – семиинвариант четвертого порядка;

3) временные ряды $\{\xi_t\}$ и $\{\eta_t\}$ представляются в виде:

$$\xi_t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k v_{t-k},\quad \eta_t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\widetilde{v}_{t-k},$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma_k|<\infty$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\beta_k|<\infty$, а $\{v_t\},\{\widetilde{v}_t\}$ – последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин с

$$E\{v_t\}=E\{\widetilde{v}_t\}=0;\quad E\{v_t^2\}=E\{\widetilde{v}_t^2\}=\sigma^2,\quad E\{v_t^4\}=E\{\widetilde{v}_t^4\}<\infty;$$

4) имеет место асимптотика:

$$T_1,T_2\to\infty,\quad K_{T_1},K_{T_2}\to\infty,\quad \text{и}\quad \frac{K_{T_1}}{T_1}\to 0, \frac{K_{T_2}}{T_2}\to 0,$$

$$m=O(T^{1-\mu}),\quad 0<\mu<1,\quad m\to\infty.$$

Тогда при выполнении гипотезы $H_{\text{н}}$ статистика $\widetilde{G}$ распределена асимптотически нормально:

$$L\left\{\frac{\widetilde{G}-a(T_1,T_2)}{\sqrt{B(T_1,T_2)}}\right\}\to N_1(0,1),$$

где
$$a(T_1,T_2)=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(u_{m+k}^0-u_k^0+\frac{1}{K_{T_1}^q}h(u_k^0)^{[q]}-\frac{1}{K_{T_2}^q}h(u_{m+k}^0)^{[q]}\right)^2}{\sum_{k=1}^{m}\left((u_{m+k}^0)^2+(u_k^0)^2\right)}, \qquad (7)$$

$$B(T_1,T_2)=\frac{4Q\left(\sum_{k=1}^{m}\left(u_{m+k}^0-u_k^0\right)^2\left(\left(u_k^0\right)^2\frac{K_{T_1}}{T_1}+\left(u_{m+k}^0\right)^2\frac{K_{T_2}}{T_2}\right)\right)}{\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^o\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)\right)^2}. \tag{8}$$

Доказательство. В соответствии с [6] определим асимптотические выражения для математического ожидания оценки спектральной плотности

$$E\left\{\widetilde{S}_j(\lambda)\right\}=S_j^0(\lambda)-\frac{1}{K_{T_j}^q}h\left(S_j^0\right)^{[q]}(\lambda), \tag{9}$$

где
$$(S_j^0)^{[q]}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^q\cos(\lambda k)R_j(k),$$

и для дисперсии оценки спектральной плотности

$$D\left\{\widetilde{S}_j(\lambda)\right\}=\frac{K_{T_j}}{T_j}\left(S_j^0(\lambda)\right)^2Q. \tag{10}$$

С учетом того, что в силу условий 1), 2) и 4) данной теоремы спектральные оценки $\hat{S}_1(f_1),\ldots,\hat{S}_1(f_m),\hat{S}_2(f_1),\ldots,\hat{S}_2(f_m)$. асимптотически независимы, и принимая во внимание (10), приходим к выводу, что асимптотическая $(2m\times 2m)$-ковариационная матрица оценок спектральных плотностей будет иметь диагональный вид:

$$\Sigma=Q\cdot\operatorname{diag}\left\{\frac{K_{T_1}}{T_1}(u_1^0)^2,\ldots,\frac{K_{T_1}}{T_1}(u_m^0)^2,\frac{K_{T_2}}{T_2}(u_{m+1}^0)^2,\ldots,\frac{K_{T_2}}{T_2}(u_{2m}^0)^2\right\}. \tag{11}$$

Согласно (6), $\widetilde{G}$ является функцией от $U=\{u_k\}$. Воспользуемся леммой для вычисления математического ожидания и дисперсии этой статистики.

В силу условий 3) и 4) теоремы оценки спектральных плотностей асимптотически нормальны. С учетом (9) значение математического ожидания $a\{T_1,T_2\}$ этого асимптотического распределения равно:

$$a(T_1,T_2)=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(u_{m+k}^0-u_k^0+\frac{1}{K_{T_1}^q}h\left(u_k^0\right)^{[q]}-\frac{1}{K_{T_2}^q}h\left(u_{m+k}^0\right)^{[q]}\right)^2}{\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^0\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)}, \tag{12}$$

что совпадает с (7).

Вектор-столбец производных D запишется в виде:

$$D=\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial u_s}\bigg|_{U=U^0}=\begin{cases}\dfrac{-2\left(u_{m+s}^0-u_s^0\right)}{\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^0\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)}, & s=\overline{1,m}\\[2ex] \dfrac{2\left(u_s^0-u_{s-m}^0\right)}{\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^0\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)}, & s=\overline{m+1,2m}.\end{cases} \tag{13}$$

В силу условия 4) теоремы значение параметра $b_n^2=\frac{K_{T_j}}{T_j}\to 0$. Тогда, учитывая (11) и (13), дисперсия асимптотического распределения $B(T_1,T_2)$ вычисляется следующим образом:

$$B(T_1,T_2)=D\Sigma D^T=\frac{4Q}{\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^0\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)\right)^2}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(u_{m+k}^0-u_k^0\right)^2\left(u_k^0\right)^2\frac{K_{T_1}}{T_1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=m+1}^{2m}\left(u_k^0-u_{k-m}^0\right)^2\left(u_k^0\right)^2\frac{K_{T_2}}{T_2}\right)=\frac{4Q\left(\sum_{k=1}^{m}\left(u_{m+k}^0-u_k^0\right)^2\left(\left(u_k^0\right)^2\frac{K_{T_1}}{T_1}+\left(u_{m+k}^0\right)^2\frac{K_{T_2}}{T_2}\right)\right)}{\sum_{k=1}^{m}\left(\left(u_{m+k}^0\right)^2+\left(u_k^0\right)^2\right)^2}, \quad (14)$$

что совпадает с (8).

Теорема доказана.

Следствие. Справедлива следующая аппроксимация мощности теста

$$W=P_{H_{1\tau}}\{G\geq\Delta\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\Delta-a(T_1,T_2)}{\sqrt{B(T_1,T_2)}}\right), \quad (15)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения.

Доказательство. Мощность теста, основанного на статистике $\widetilde{G}$, определяется следующим образом:

$$W_1=P_{H_{1\tau}}\left\{\widetilde{G}\geq\Delta\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\Delta-a(T_1,T_2)}{\sqrt{B(T_1,T_2)}}\right). \quad (16)$$

Статистика $\widetilde{G}$ — непрерывное функциональное преобразование от оценок спектральных плотностей (1), которые являются состоятельными [6]. Поэтому для статистики $\widetilde{G}$ имеет место сходимость по вероятности $\widetilde{G}-G\xrightarrow{P}0$. Следовательно, (16) можно переписать в виде (15), что и доказывает следствие.

1. Клигене Н., Телькснис Л. // Автоматика и телемеханика. 1983. №10. С.5.
2. Никифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.,1983.
3. Giraitis L., Leipus R. // Liet Matem. Rink. 1992. Vol.32. №1. P.20.
4. Абрамович М.С. // Компьютерный анализ данных и моделирование. Мн., 1995.
5. Serfling R.J. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. New York, 1980.
6. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1971.

Поступила в редакцию 24.04.97.

УДК 519.872

А.У.БАБІЦКІ

АПТЫМІЗАЦЫЯ ЎВАХОДНАЙ ПЛЫНІ АДНАЛІНЕЙНАЙ СІСТЭМЫ МАСАВАГА АБСЛУГОЎВАННЯ

The paper treats the steady state of a single server queue with infinite capacity and input flow which consists of several filtrated Poisson input processes. The queue suffers loss caused by maintenance of accepted customers and by refusals of acceptance. A problem for the total loss minimazing by setting optimal values for acceptance propabilities is investigated. The structure of the optimal decision is determined and an algorithm for its search is proposed.

1. Мадэль. Даследуецца адналінейная сістэма масавага абслугоўвання з неабмежаванай чаргой. На прыбор паступае n стацыянарных пуасонаўскіх плыняў з інтэнсіўнасцямі λ_i, $i=1,...,n$. Заяўкі i-га тыпу характарызуюцца: першым і другім пачатковымі момантамі часу абслугоўвання b_i і d_i, штрафам a_i за адмову прыняцця заяўкі, штрафам $c_i>0$ за адзінку часу знаходжання патрабавання ў сістэме. Пры паступленні патрабаванне i-га тыпу прымаецца ў сістэму з імавернасцю q_i, а з імавернасцю $1-q_i$ пакідае сістэму неабслужаным. Мяркуецца, што дапушчаныя ў сістэму патрабаванні трапляюць на прыбор