УДК 517.21

Л.А.ПИЛИПЧУК, А.С.ПИЛИПЧУК

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ДВОЙСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Linear extremal dual problem of special structures is considered. An optimality criterion is formulated and proved.

Рассмотрим конечную ориентированную сеть $S=\{I,U\}$ с множеством узлов I и множеством дуг U. Будем считать, что $I=I^C\cup I^*$, $I^C\cap I^*=\varnothing$, где I^C – множество узлов с постоянными интенсивностями a_i, I^* – множество узлов с переменными интенсивностями $\pm x_i$. Через $I^\Pi\subset I^*$ обозначим множество узлов (пунктов производства) с интенсивностями x_i и через $I^*\backslash I^\Pi$ – множество узлов с интенсивностями x_i, где $a_{*i}\le x_i\le a_i^*$, $a_{*i}>0$.

Введем для узлов $i\in I^*$ характеристику c_i, которая для узлов из I^Π означает затраты, связанные с увеличением производства на единицу продукта, для узлов из $I^*\backslash I^\Pi$ – затраты на хранение единицы продукта. Остальные характеристики оставим традиционными: d_{ij} – пропускная способность дуги (i,j); x_{ij} – дуговой поток; c_{ij} – стоимость перевозки единицы потока по дуге (i,j).

На сети S рассмотрим задачу:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I^*} c_i x_i \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} a_i, i\in I^C \\ x_i, i\in I^\Pi \\ -x_i, i\in I^*\backslash I^\Pi, \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I^*} \alpha_i^k x_i = b_k, k=\overline{1,l}, \tag{3}$$

$$a_{*i}\le x_i\le a_i^*, i\in I^*;\ 0\le x_{ij}\le d_{ij}, (i,j)\in U. \tag{4}$$

Обозначим через $S^p=\{I^p,U^p\}$, $p=\overline{1,s}$ компоненты связности сети $S=\{I,U\}$. Будем считать, что $I^p\cap I^*\ne\varnothing$ для $1\le p\le s$, ибо в противном случае в задаче (1)–(4) можно выделить независимую подзадачу, соответствующую компоненте связности $S^p, I^p\cap I^*=\varnothing$, которая сводится к решению классической транспортной задачи.

Двойственная задача для (1)–(4) имеет вид:

$$\sum_{i\in I^C} a_i y_i + \sum_{k=1}^{l} b_k g_k + \sum_{i\in I^*} a_{*i}v_i - \sum_{i\in I^*} a_i^* t_i - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij}w_{ij} \to \max, \tag{5}$$

$$y_i - y_j - w_{ij}\le c_{ij},\ w_{ij}\ge 0,\ (i,j)\in U, \tag{6}$$

$$-y_i\operatorname{sign}[i] + \sum_{k=1}^{l} \alpha_i^k g_k - t_i + v_i = c_i,\ t_i\ge 0, v_i\ge 0, i\in I^*, \tag{7}$$

где $\operatorname{sign}[i] = \begin{cases} 1, & i\in I^\Pi \\ -1, & i\in I^*\backslash I^\Pi. \end{cases}$

Определение 1. Двойственным планом задачи (1)–(4) называется совокупность $y=(y_i, i\in I; g_k, k=\overline{1,l}; v_i, t_i, i\in I^*; w_{ij}, (i,j)\in U)$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи (5)–(7).

Каждому двойственному плану y поставим в соответствие копоток δ задачи (1)–(4):

$$\delta=(\delta_{ij}, (i,j)\in U;\ \delta_i, i\in I^*),$$

где $\delta_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}, (i,j)\in U$, $\delta_i = -y_i\operatorname{sign}[i] + \sum_{k=1}^{l}\alpha_i^k g_k - c_i, i\in I^*$.

Введем условия согласования компонент копотока $\delta=(\delta_{ij},(i,j)\in U,\ \delta_i,i\in I^*)$ с компонентами векторов w,t,v: $w=(w_{ij},(i,j)\in U)$, $t=(t_i,i\in I^*)$, $v=(v_i,i\in I^*)$, которые должны выполняться для оптимального двойственного плана, ибо при их нарушении можно, изменяя соответствующие компоненты векторов w,t,v, добиться увеличения двойственной целевой функции (5).

Условия согласования имеют вид:

$$\begin{aligned}
&w_{ij}=\delta_{ij},\ \text{если}\ \delta_{ij}>0,(i,j)\in U;\\
&w_{ij}=0,\ \text{если}\ \delta_{ij}\le 0,(i,j)\in U;\\
&t_i=0,\ v_i=0,\ \text{если}\ \delta_i=0,i\in I^*;\\
&t_i=\delta_i,\ v_i=0,\ \text{если}\ \delta_i>0,i\in I^*;\\
&t_i=0,\ v_i=-\delta_i,\ \text{если}\ \delta_i<0,i\in I^*.
\end{aligned} \tag{8}$$

Следуя [1], определим опору сети S как совокупность множеств $S_{on}=\{I_{on},U_{on}\},I_{on}\subseteq I^*,U_{on}\subseteq U$, таких, что:

1) каждая компонента связности $S_{on}^p=\{J^p,U_{on}^p\}$, $p=\overline{1,q}$ частичной сети $\{I,U_{on}\}$ не содержит циклов;

2) в каждой компоненте связности $\{J^p,U_{on}^p\}$ содержится хотя бы один опорный узел, т.е. $J_{on}^p=J^p\cap I_{on}\neq\varnothing$, $p=\overline{1,q}$;

3) имеет место равенство $q+l=|I_{on}|$ и $\det D(I_{on})\neq 0$. Здесь $D(I_{on})$ – квадратная матрица размера $(q+l)*|I_{on}|$,

$$D(I_{on})=\begin{bmatrix}\hat D\\ D_\alpha\end{bmatrix},\quad \hat D=\begin{bmatrix}D_1' & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & D_q\end{bmatrix}$$

и блок D_p представляет собой строку из $|I_{on}^p|$ элементов, каждый из которых равен $-\text{sign}[i]$, $i\in J_{on}^p$, $p=\overline{1,q}$, а D_α–$l\times|I_{on}|$ – матрица, k-ая строка которой состоит из элементов α_i^k, $i\in I_{on}$, $k=\overline{1,l}$.

Определение 2. Пара $\{\delta,S_{on}\}$ из копотока и опоры сети называется опорным копотоком.

Компоненты копотока δ_{ij} по опорным дугам $(i,j)\in U_{on}$ и δ_i по опорным узлам $i\in I_{on}$ называют опорными дуговыми и узловыми копотоками соответственно. Остальные компоненты δ_{ij}, $(i,j)\in U_\text{н}=U\setminus U_{on}$ и δ_i, $i\in I_\text{н}=I^*\setminus I_{on}$, неопорные дуговые и узловые компоненты копотока δ соответственно.

Пусть $\{\delta,S_{on}\}$ – некоторый опорный копоток. Построим по нему опорный псевдопотокоплан $\chi=(\chi_{ij},(i,j)\in U;\chi_i,\ i\in I^*)$. Неопорные компоненты псевдопотокоплана χ положим равными :

$$\begin{aligned}
&\chi_{ij}=0,\ \text{если}\ \delta_{ij}\le 0;\ \chi_{ij}=d_{ij},\ \text{если}\ \delta_{ij}>0,\ (i,j)\in U_\text{н},\\
&\chi_i=a_{*i},\ \text{если}\ \delta_i\le 0;\ \chi_i=a_i^*,\ \text{если}\ \delta_i>0,\ i\in I_\text{н}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Опорные дуговые и узловые компоненты псевдопотокоплана χ найдутся однозначно из системы:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in I_i^+(U_{on})}\chi_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U_{on})}\chi_{ji}=a_i-\sum_{j\in I_i^+(U_\text{н})}\chi_{ij}+\sum_{j\in I_i^-(U_\text{н})}\chi_{ji},i\in I^c,\\
&\sum_{j\in I_i^+(U_{on})}\chi_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U_{on})}\chi_{ji}=-\sum_{j\in I_i^+(U_\text{н})}\chi_{ij}+\sum_{j\in I_i^-(U_\text{н})}\chi_{ji}+\chi_i\text{sign}[i],i\in I^*\setminus I_{on},\\
&\sum_{j\in I_i^+(U_{on})}\chi_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U_{on})}\chi_{ji}-\chi_i\text{sign}[i]=-\sum_{j\in I_i^+(U_\text{н})}\chi_{ij}+\sum_{j\in I_i^-(U_\text{н})}\chi_{ji},i\in I_{on},\\
&\sum_{i\in I_{on}}\alpha_i^k\chi_i=b_k-\sum_{i\in I^*\setminus I_{on}}\alpha_i^k\chi_i,k=\overline{1,l}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Укажем способ решения системы (10). Обозначим $f=(f_i, i\in I;\ t_k, k=\overline{1,l})$ – вектор правых частей системы (10), где

$$f_i=\begin{cases} a_i-\sum\limits_{j\in I_i^+(U_н)}\chi_{ij}+\sum\limits_{j\in I_i^-(U_н)}\chi_{ji},\ i\in I^c;\\ -\sum\limits_{j\in I_i^+(U_н)}\chi_{ij}+\sum\limits_{j\in I_i^-(U_н)}\chi_{ji}+\chi_i\mathrm{sign}[i],\ i\in I^*\setminus I_{оп};\\ -\sum\limits_{j\in I_i^+(U_н)}\chi_{ij}+\sum\limits_{j\in I_i^-(U_н)}\chi_{ji},\ i\in I_{оп};\end{cases}$$

$$t_k=b_k-\sum_{i\in I^*\setminus I_{оп}}\alpha_i^k\chi_i,\ k=\overline{1,l}.$$

Для каждой компоненты связности $S_{оп}^p=\{J^p,U_{оп}^p\}$, $p=\overline{1,q}$, сложим уравнения системы (10), соответствующие узлам множества J^p и рассмотрим полученные в результате указанных преобразований уравнения в совокупности с последними l уравнениями системы (10). Полученная система линейных уравнений $D(I_{оп})\cdot r=\overline{f}$, где $r=(\chi_i, i\in I_{оп})$, $\overline{f}=(\overline{f}_p, p=\overline{1,q};t_k, k=\overline{1,l})$, $\overline{f}_p=\sum\limits_{j\in J^p}f_j$, $p=\overline{1,q}$ имеет единственное решение, так как $\det D(I_{оп})\neq 0$.

Остальные компоненты опорного псевдопотокоплана χ_{ij}, $(i,j)\in U_{оп}^p$, соответствующие компонентам связности $S_{оп}^p=\{J^p,U_{оп}^p\}, p=\overline{1,q}$, вычисляем согласно [2].

Определение 3. Опорный копоток $\{\delta, S_{оп}\}$ называется вырожденным, если среди его неопорных компонент имеются нулевые.

Приведем и докажем критерий оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{оп}\}$ двойственной задачи (5)–(7).

Теорема (критерий оптимальности). Соотношения

$$\begin{gathered}\chi_{ij}=0 \text{ при } \delta_{ij}<0,\ \chi_{ij}=d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}>0,\\ 0\le\chi_{ij}\le d_{ij} \text{ при } \delta_{ij}=0,\ (i,j)\in U_{оп} \text{ на дугах и}\\ \chi_i=a_{*i} \text{ при } \delta_i<0,\ \chi_i=a_i^* \text{ при } \delta_i>0,\\ a_{*i}\le\chi_i\le a_i^* \text{ при } \delta_i=0,\ i\in I_{оп} \text{ на узлах}\end{gathered}\tag{11}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{оп}\}$. Опорный псевдопотокоплан, соответствующий оптимальному опорному копотоку $\{\delta, S_{оп}\}$, является оптимальным потокопланом задачи (1)–(4).

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\{\delta, S_{оп}\}$ – некоторый опорный копоток. Построим по нему опорный псевдопотокоплан $\chi=(\chi_{ij},(i,j)\in U;\ \chi_i, i\in I^*)$. Неопорные компоненты псевдопотокоплана $\chi_{ij},(i,j)\in U_{Н}$ на дугах и $\chi_i, i\in I_{Н}$ в узлах положим равными (9). Опорные компоненты псевдопотокоплана однозначно найдем из системы (10).

Соотношения критерия оптимальности (11) для опорного копотока $\{\delta, S_{оп}\}$ с учетом значений неопорных компонент псевдопотокоплана (9) и опорных компонент псевдопотокоплана (11) означает, что вектор $\chi=(\chi_{ij},(i,j)\in U;\ \chi_i, i\in I^*)$ удовлетворяет ограничениям (2)–(4) прямой задачи. Оптимальность χ следует из равенства значений целевых функций прямой (1)–(4) и двойственной (5)–(7) задач на χ и δ:

$$\sum_{(i,j)\in U}c_{ij}\chi_{ij}+\sum_{i\in I^*}c_i\chi_i=\sum_{(i,j)\in U}(y_i-y_j-\delta_{ij})\chi_{ij}+\sum_{i\in I^*}(-y_i\mathrm{sign}[i]+\sum_{k=1}^{l}\alpha_i^k g_k-\delta_i)\chi_i=$$

$$= \sum_{i\in I} y_i\Big(\sum_{j\in I_i^+(U)} \chi_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \chi_{ji}\Big) - \sum_{(i,j)\in U} \delta_{ij}\chi_{ij} - \sum_{i\in I^*} y_i \mathrm{sign}[i]\chi_i + \sum_{i\in I^*}\sum_{k=1}^{l} \alpha_i^k g_k \chi_i - \sum_{i\in I^*} \delta_i \chi_i =$$

$$= \sum_{i\in I^C} a_i y_i + \sum_{k=1}^{l} b_k g_k + \sum_{i\in I^*} a_{*i} v_i - \sum_{i\in I^*} a_i^* t_i - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}.$$

Необходимость. Пусть δ^0 — оптимальный невырожденный копоток, построенный по оптимальному двойственному плану $y^0 = (y_i^0, i\in I;\ g_k^0, k=\overline{1,l};\ v_i^0, t_i^0, i\in I^*;\ w_{ij}^0, (i,j)\in U)$. Согласно теории двойственности существует оптимальный потокоплан $x^0=(x_{ij}^0,(i,j)\in U; x_i^0, i\in I^*)$ задачи (1)–(4) и пара x^0, y^0 удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости, где:

$$x_{ij}^0(y_i^0 - y_j^0 - w_{ij}^0 - c_{ij}) = 0,\ w_{ij}(x_{ij}^0 - d_{ij}) = 0, (i,j)\in U;$$

$$x_i^0(-y_i^0 \mathrm{sign}[i] + \sum_{k=1}^{l} a_i^k g_k^0 - t_i^0 + v_i^0 - c_i) = 0; \tag{12}$$

$$t_i(x_i^0 - a_i^*) = 0,\ v_i(a_{*i} - x_i^0),\ i\in I^*.$$

Из условий согласования (8) и соотношений (12) для неопорных дуг и узлов имеем:

$x_{ij}^0=0$, если $\delta_{ij}^0<0$; $x_{ij}^0=d_{ij}$, если $\delta_{ij}^0>0$;

$x_{ij}^0=a_{*i}$, если $\delta_i^0<0$; $x_{ij}^0=a_i^*$, если $\delta_i^0>0$.

Поскольку опорные компоненты вектора x^0 однозначно вычисляются из (2),(3) по заданным неопорным компонентам вектора x^0, то заключаем, что $x^0=\chi$. Соотношения (11) справедливы для опорных компонент вектора x^0 в силу условий дополняющей нежесткости (12) и ограничений задачи (1)–(4). Теорема доказана.

1. Пилипчук Л.А., Командина Л.В. // Numerical Methods and Applications: Proceeding of the International Methods and Applications. Sofia, 1989. P.370.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 17.02.97.

УДК 519.2

М.С.АБРАМОВИЧ

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТА "РАЗЛАДКИ" ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

The problem of asymptotic analysis of power of criterion, which is based on spectral density estimators, is investigated for disorder detection test in time series.

Для обнаружения моментов "разладки" временных рядов широко используются методы, основанные на модели авторегрессии и скользящего среднего [1], и метод кумулятивных сумм [2]. В меньшей мере для решения этой проблемы исследовано применение методов спектрального анализа [3].

В [4] построен критерий для обнаружения момента "разладки" с использованием оценок спектральных плотностей, найдено асимптотическое распределение статистики критерия и построен тест для обнаружения момента "разладки". В настоящей работе исследуется мощность этого теста.

1. Математическая модель. Пусть ξ_t, $t\in Z$ — стационарный временной ряд с нулевым средним и некоторой спектральной плотностью $S_1^0(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$, η_t, $t\in Z$ — стационарный временной ряд с нулевым средним и некоторой другой спектральной плотностью $S_2^0(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$, отличной от $S_1^0(\cdot)$: $S_1^0(\cdot)\neq S_2^0(\cdot)$. Наблюдаемый временной ряд $X=\{x_t: t=1,2,...,T\}$ длительностью T имеет "разладку" в неизвестный момент времени $t_0\in\{\tau_-,\tau_-+1,...,\tau_+,T+1\}$, которая порождается "скачкообразным изменением" спектральной плотности: