Краткие сообщения

УДК 519.6

В.П.КИРЛИЦА

ТОЧНЫЕ *D*-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ ПРИ КВАЗИЛИНЕЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ДИСПЕРСИИ НАБЛЮДЕНИЙ

The problem of construction robust *D*-optimal designs of experiments for linear regression is investigated.

Рассмотрим простейшую линейную модель неравноточных наблюдений:

$$y_i = \Theta_0 + \Theta_1 x_i + \varepsilon(x_i), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где y_i – наблюдаемые значения; Θ_0, Θ_1 – неизвестные параметры; x_i – контролируемые переменные из отрезка $[-1,1]$; $\varepsilon(x_i)$ – некоррелированные ошибки с нулевым средним и дисперсией

$$D\{\varepsilon(x_i)\}=(ax_i+b)^{\alpha}, \quad 0\le\alpha\le 1. \tag{2}$$

В (2) a, b и α – константы, $|a|<b$, $b>0$.

Точные *D*-оптимальные планы экспериментов в модели наблюдений (1), (2) позволяют для заданного числа n строить МНК-оценки неизвестных параметров Θ_0, Θ_1 с наименьшей площадью эллипса рассеивания [1]. При равноточных наблюдениях ($\alpha=0$) такие планы для линейной множественной регрессии были построены в [2]. Для линейного изменения дисперсии наблюдений ($\alpha=1$) точные *D*-оптимальные планы экспериментов (1), (2) построены в [3]. В данной статье обосновывается, что для $0\le\alpha\le 1$ планы, построенные в [3], остаются точными *D*-оптимальными.

Лемма. Точки спектра точного *D*-оптимального плана модели наблюдений (1), (2) лежат на концах интервала $[-1,1]$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что точки x_i, $i=\overline{1,n-1}$ спектра плана экспериментов фиксированы, а точка $x_n=x$ – "плавающая", $x\in[-1,1]$.

Вводя обозначения:

$$c=\sum_{i=1}^{n-1}(1+kx_i)^{-\alpha}, \quad d=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2(1+kx_i)^{-\alpha}, \quad e=\sum_{i=1}^{n-1}x_i(1+kx_i)^{-\alpha}, \quad k=\frac{a}{b}, \tag{3}$$

определитель информационной матрицы плана экспериментов можно записать в виде:

$$f(x)=\frac{cx^2-2ex+d}{b^{2\alpha}(1+kx)^{\alpha}}. \tag{4}$$

Учитывая, что $x_i\in[-1,1]$, из (3) заключаем, что

$$c\ge 0,\ d\ge 0,\ d\le c,\ |e|\le c,\ c-2e+d\ge 0. \tag{5}$$

Лемма будет доказана, если показать, что максимум $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$ достигается при $x^0=\pm 1$. Для этого надо установить, что

$$f(x)\le f(1),\ x\in[-1,1], \tag{6}$$

если

$$f(-1)\le f(1), \tag{7}$$

либо $f(x)\le f(-1),\ x\in|-1,1|,$ (8)

если $f(1)\le f(-1).$ (9)

Для определенности положим, что реализуется ситуация (6), (7). Ситуация, соответствующая (8), (9), рассматривается аналогично.

Учитывая, что для $x\in|-1,1|$ знаменатель в (4) положителен, нетрудно показать, что неравенство (6) эквивалентно неравенству

$$\varphi(x)=(1+kx)^{\alpha}(c-2e+d)-(1+k)^{\alpha}(cx^2-2ex+d)\ge 0,\quad x\in|-1,1|. \tag{10}$$

Очевидно, что $\varphi(1)=0$, а $\varphi(-1)\ge 0$ в силу (7). Вторая производная функции $\varphi(x)$ для всех $x\in|-1,1|$ меньше или равна нулю:

$$\varphi''(x)=(\alpha-1)\alpha k^2(1+kx)^{\alpha-2}(c-2e+d)-2(1+k)^{\alpha}c\le 0. \tag{11}$$

Неравенство (11) следует из того, что $(c-2e+d)\ge 0$, $0\le\alpha\le 1$, $|k|<1$. Неравенство (11) означает, что $\varphi(x)$ – вогнутая функция на отрезке $[-1,1]$. Учитывая дополнительно, что $\varphi(1)=0$, $\varphi(-1)\ge 0$, заключаем, что (10) выполняется. Лемма доказана.

Опираясь на лемму, докажем теорему.

Теорема. Точный D-оптимальный план экспериментов для модели наблюдений (1),(2) имеет вид:

$$\varepsilon_{2s}^{0}=\begin{Bmatrix}-1;1\\ s;s\end{Bmatrix} \tag{12}$$

для четного числа наблюдений $n=2s$;

$$\varepsilon_{2s+1}^{0}=\begin{Bmatrix}-1;\ 1\\ s;s+1\end{Bmatrix},\quad \varepsilon_{2s+1}^{0}=\begin{Bmatrix}-1\ ;\ 1\\ s+1;s\end{Bmatrix} \tag{13}$$

для нечетного числа наблюдений $n=2s+1$.

Доказательство. Согласно лемме, точный D-оптимальный план должен иметь структуру:

$$\varepsilon_{n}=\begin{Bmatrix}-1;\ 1\\ m;n-m\end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где m – число минус единиц в спектре плана, $m\in\{0,1,\dots,n\}$. Определитель информационной матрицы плана (14) равен:

$$\frac{4(n-m)\cdot m}{(b^2-a^2)^{\alpha}}. \tag{15}$$

Максимум функции (15) по $m\in\{0,1,\dots,n\}$ достигается при $m=s$ для $n=2s$ и при $m=s$ либо $m=s+1$ для $n=2s+1$. Теорема доказана.

1. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.,1968.
2. Moyssiadis C., Kounias S. //Math. Operationsforsch. u. Statist. 1983. №3. P.367.
3. Кирлица В.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1995. №1. С.42.

Поступила в редакцию 11.03.97.

УДК 517.923

В.Ф.ФИЛИППОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

The sufficient conditions for the periodicity of every solution of the system in the title was given.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)y+a_3(t)x^2+a_4(t)xy+a_5(t)y^2\equiv P(t,x,y),\\ \dot{y}&=b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)y+b_3(t)x^2+b_4(t)xy+b_5(t)y^2\equiv Q(t,x,y)\end{aligned} \tag{1}$$

с непрерывными на R коэффициентами. Потребуем, чтобы ее отражающая функция имела вид