учитывая, что емкостная сложность копирования считается только один раз и z (равное $f(\tilde{x}^n)$) есть максимальное значение y, получаем

$$L_2(\tilde{x}^n) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i + 2n + 1 + f(\tilde{x}^n) + L_1(\tilde{x}^{n-1}, i_0).$$

Теорема доказана.

Данная работа для второго автора была поддержана Международной Соросовской программой образования в области точных наук.

1. Хартманис Дж., Хопкрофт Дж. Э. // Кибернетич. сб. (нов. сер.). М., 1974. Вып.II. С.130.

2. Трахтенброт Б.А. Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирск, 1967.

3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М., 1979. С.407.

4. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1986.

Поступила в редакцию 18.12.96.

УДК 512.542

Ю.В.КРАВЧЕНКО

О ФОРМАЦИЯХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ МУЛЬТИКОЛЕЦ

The main idea of this article is the construction of the theory of polyadic multirings. Polyadic multiring is algebraic object, which represent n-arity groups and rings. Using lattice approach we describe normal structure of a polyadic multiring.

The major result is following theorem.

Theorem. Let f is arbitrary $\mathfrak{X}$-screen. Then $\langle f \rangle$ is nonempty formation of polyadic multirings.

This theorem make possible application formation methods of study for reseach polyadic multirings.

Одним из наиболее важнейших способов изучения любой алгебраической системы является рассмотрение ее подсистем и фактор-систем, обладающих теми или иными свойствами. Впервые класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, был использован Гашюцом в 1963 году в связи с разработкой общих методов отыскания подгрупп в конечных разрешимых группах и назван им формацией. Наибольший интерес в этом направлении исследования при помощи классов алгебраических систем вызывает вполне сформировавшаяся в самостоятельную область общей алгебры теория формаций. Основа этой теории заложена в широко известных монографиях Л.А.Шеметкова "Формации конечных групп" [1] и Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы "Формации алгебраических систем" [2], которые являются фундаментом всей теории формаций.

Однако следует заметить, что такая алгебраическая система, как n-арная группа (см. [3]) при $n>2$, оказалась как бы в стороне от формационных методов исследования. Это объясняется следующими обстоятельствами. В n-арной группе могут существовать такие нормальные (или, более обще, полуинвариантные) подгруппы, пересечение которых пусто и которые определяют один и тот же естественный гомоморфизм [4].

Полиадические мультикольца представляют собой обобщение таких алгебраических систем, как мультикольца и n-арные группы. Одним из моментов, стимулирующих интерес к изучению таких алгебраических объектов, как полиадические мультикольца, являются слова известного алгебраиста А.Г.Куроша: "...между теорией универсальных алгебр и классическими разделами общей алгебры существует большое необработанное пространство... Нужно ожидать, что именно в это "ничейное" пространство будут передвигаться в ближайшие десятилетия основные интересы общей алгебры" [5].

Цель данной работы — построение формации полиадических мультиколец при помощи экранов.

Основные определения и обозначения взяты из [1—3].

Будем рассматривать универсальные алгебры фиксированной сигнатуры $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$, где с символом нульарной операции ε будем ассоциировать элемент, выделяемый этой операцией.

Определение 1. Универсальную алгебру A сигнатуры $\Omega\cup\{\omega_n,\varepsilon\}$ будем называть полиадическим мультикольцом, если:

1) алгебра A является n-арной группой ($n\geq 2$) относительно операции ω_n;

2) все операции из Ω имеют ненулевую арность;

3) для любой m-арной операции $\sigma\in\Omega$, любых $a_1,\ldots,a_m,a_1',\ldots,a_n'\in A$ имеет место равенство

$$\left(a_1^{i-1},(a_1',\ldots,a_n')\omega_n,a_{i+1}^m\right)\sigma=\left((a_1^{i-},a_1',a_{i+1}^m)\sigma,\ldots,(a_1^{i-},a_1',a_{i+1}^m)\sigma\right)\omega_n;$$

4) для элемента ε выполняются следующие условия:

$$\left(\overset{i-1}{\varepsilon},x,\overset{n-1}{\varepsilon}\right)\omega_n=x \text{ и } \left(a_1^{i-1},\varepsilon,a_{i+1}^m\right)\sigma=\varepsilon,$$

где x, $a_1,\ldots,a_m\in A$, $i\in\{1,\ldots,m\}$, $\sigma_m\in\Omega$.

Элемент $\varepsilon\in A$, удовлетворяющий свойству 4) определения 1, будем называть нейтральным элементом полиадического мультикольца A.

Подмножество H полиадического мультикольца A назовем сильно замкнутым в A относительно операций из Ω, если для любых $a_1,\ldots,a_m\in A$, любого $i\in\{1,\ldots,m\}$, любой $\sigma_m\in\Omega$ вместе с каждым элементом h оно содержит и элемент $\left(a_1^{i-1},h,a_{i+1}^m\right)\sigma$.

Определение 2. Подмножество K полиадического мультикольца A сигнатуры $\Omega\cup\{\omega_n,\varepsilon\}$ назовем подалгеброй в A, если оно замкнуто относительно операций из $\Omega\cup\{\omega_n,\varepsilon\}$. Идеалом в A назовем всякую его подалгебру, которая является нормальной подгруппой n-арной группы A и сильно замкнута в A относительно операций из Ω.

Все рассматриваемые полиадические мультикольца имеют сигнатуру $\Omega\cup\{\omega_n,\varepsilon\}$ и принадлежат некоторому фиксированному мальцевскому многообразию $\mathfrak{M}$, удовлетворяющему условиям минимальности и максимальности для подалгебр.

Пусть α — конгруэнция полиадического мультикольца. Тогда через $[\varepsilon]_\alpha$ будем обозначать множество $\{x\in A\mid(x,\varepsilon)\in\alpha\}$.

Лемма 1. Пусть α — конгруэнция на полиадическом мультикольце A. Тогда $[\varepsilon]_\alpha$ — идеал в A.

Доказательство. Конгруэнция A на n-арной группе A индуцирует естественный эпиморфизм φ: $A\to A/\alpha$ такой, что $(a,b)\in\alpha$ тогда и только тогда, когда $a^\varphi=b^\varphi$ для любых $a,b\in A$. Заметим, что $\left([\varepsilon]_\alpha,\ldots,[\varepsilon]_\alpha\right)\omega_n=[(\overset{n}{\varepsilon})\omega_n]=[\varepsilon]_\alpha$, т.е. $[\varepsilon]_\alpha$ — идемпотентный элемент n-арной группы A/α. Поэтому $\mathrm{Ker}_{[\varepsilon]_\alpha}\varphi=$ $=\{x\in A\mid x^\varphi=[\varepsilon]_\alpha\}=\{x\in A\mid x^\varphi=\varepsilon^\varphi\}=[\varepsilon]_\alpha$. Согласно [6], $\mathrm{Ker}_{[\varepsilon]_\alpha}\varphi$ — полуинвариантная в A подгруппа.

Пусть $a\in[\varepsilon]_\alpha$, $x\in A$, (x_1^t) — последовательность, обратная к элементу x. Так как $(x,x)\in\alpha$, $(a,\varepsilon)\in\alpha$ и $(x_i,x_i)\in\alpha$, $i\in\{1,\ldots,t\}$, то $\left((x,a,x_1^t)\omega_n,(x,\varepsilon,x_1^t)\omega_n\right)=$ $=\left((x,a,x_1^t)\omega_n,\varepsilon\right)\in\alpha$, т.е. $(x,a,x_1^t)\omega_n\in[\varepsilon]_\alpha$. Итак, $[\varepsilon]_\alpha$ — нормальная подгруппа n-арной группы A.

Покажем, что множество $[\varepsilon]_\alpha$ сильно замкнуто в A относительно операций из Ω. Пусть $a_1,\ldots,a_m\in A$, $h\in[\varepsilon]_\alpha$, $\sigma_m\in\Omega$. Тогда, так как $(a_j,a_j)\in\alpha$, $i,j\in\{1,\ldots,m\}$, и $(h,\varepsilon)\in\alpha$, то $\left((a_1^{i-1},h,a_{i+1}^m)\sigma,(a_1^{i-1},\varepsilon,a_{i+1}^m)\sigma\right)\in\alpha$. С учетом того, что ε — нейтральный элемент в A, получаем $\left((a_1^{i-1},h,a_{i+1}^m)\sigma,\varepsilon\right)\in\alpha$, т.е. $(a_1^{i+1},h,a_{i+1}^m)\sigma\in[\varepsilon]_\alpha$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если α — конгруэнция на полиадическом мультикольце A, $K=[\varepsilon]_\alpha$ — идеал A, то для любого $b\in A$ $[b]_\alpha=(b,\overset{n-1}{K})\omega_n$.

Доказательство. Покажем, что $[b]_\alpha \subseteq (b, \overset{n-1}{K})\omega_n$. Пусть $y \in [b]_\alpha$, (b_1^t) – обратная последовательность к элементу b. Тогда, так как $(\varepsilon,\varepsilon)\in\alpha$, $(y,b)\in\alpha$ и для любого $i\in\{1,\dots,t\}$ $(b_i,b_i)\in\alpha$, то $\left((\varepsilon, b_1^t, y)\omega_n, (\varepsilon, b_1^t, b)\omega_n\right) = \left((\varepsilon, b_1^t, y)\omega_n, \varepsilon\right) \in \alpha$, т.е. $(\varepsilon, b_1^t, y)\omega_n \in [\varepsilon]_\alpha$. Так как $[\varepsilon]_\alpha$ – подгруппа n-арной группы A, то в $[\varepsilon]_\alpha$ существует последовательность (a_1^{n-1}) элементов из $[\varepsilon]_\alpha$ такая, что $(\varepsilon, b_1^t, y)\omega_n =$ $= (\varepsilon, a_1^{n-1})\omega_n$. Тогда, согласно [3], имеет место равенство $(b, b_1^t, y)\omega_n = (b, a_1^{n-1})\omega_n$. Поэтому $y = (b, a_1^{n-1})\omega_n$, т.е. $y \in (b, \overset{n-1}{K})\omega_n$. Итак, $[b]_\alpha \subseteq (b, \overset{n-1}{K})\omega_n$.

Пусть $x \in (b, \overset{n-1}{K})\omega_n$. Следовательно, $x = (b, a_1^{n-1})\omega_n$, где $a_1,\dots,a_{n-1}\in K$. Тогда, так как $(b,b)\in\alpha$ и $(a_i,\varepsilon)\in\alpha$ для любого $i\in\{1,\dots,n-1\}$, то $\left((b, a_1^{n-1})\omega_n, (b, \overset{n-1}{\varepsilon})\omega_n\right) =$

$= \left((b, a_1^{n-1})\omega_n, b\right) \in \alpha$, т.е. $x = (b, a_1^{n-1})\omega_n \in [b]_\alpha$. Поэтому $(b, \overset{n-1}{K})\omega_n \subseteq [b]_\alpha$. Лемма доказана.

Следствие. Каждый идеал полиадического мультикольца A является смежным классом одной единственной конгруэнции на A.

Из леммы 1 и определения идеала следует

Лемма 3. Каждой конгруэнции α на полиадическом мультикольце A соответствует единственный идеал из A.

Как видим, пересечение любых двух идеалов из A всегда непусто, так как оно содержит по крайней мере один элемент – нейтральный. Причем несложная проверка показывает, что множество $\{\varepsilon\}$ является идеалом в A. Будем называть его нейтральным идеалом полиадического мультикольца A.

Следующая лемма доказывается прямой проверкой.

Лемма 4. Пусть H и K – идеалы полиадического мультикольца A. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $H\cap K$ – идеал в A;

2) $\langle H, K\rangle = (H, \overset{n-1}{K})\omega_n$ является идеалом в A.

Из этой леммы следует, что множество всех идеалов полиадического мультикольца образует решетку. Обозначим $(H, \overset{n-1}{K})\omega_n = H\cdot K$.

Лемма 5. Решетка конгруэнций на полиадическом мультикольце A изоморфна решетке идеалов из A.

Для доказательства этой леммы достаточно показать, что отображение $\varphi(\alpha)=[\varepsilon]_\alpha$, где α – конгруэнция на A, является решеточным изоморфизмом.

Определение 3. Будем говорить, что множество D централизует нормальный фактор H/K полиадического мультикольца A, если D есть множество всех таких элементов $c\in A$, что

1) для любых $h_1,\dots,h_{n-1}\in H$ существуют такие $k_1,\dots,k_{n-1}\in K$, что для любого $i\in\{2,3,\dots,n\}$ выполняется равенство:

$$\left(c, h_1^{n-1}\right)\omega_n = \left(\left(h_1^{i-1}, c, h_i^{n-1}\right)\omega_n, k_1^{n-1}\right)\omega_n;$$

2) для любых $i,j\in\{1,\dots,m\}$, $i<j$, любых $a_1,\dots,a_m\in A$, любого $h\in H$, любой $\sigma_m\in\Omega$

$$\left(a_1^{i-1}, c, a_{i+1}^{j-1}, h, a_{j+1}^m\right)\sigma\in K \text{ и } \left(a_1^{i-1}, h, a_{i+1}^{j-1}, c, a_{j+1}^m\right)\sigma\in K.$$

Наибольший идеал A среди всех идеалов A, содержащихся во множестве D, будем называть централизатором фактора H/K в A и обозначать $C_A(H/K)$.

Определение 4. Отображение f: $\mathfrak{X}\to\mathfrak{L}$ назовем $\mathfrak{X}$-экраном, если выполняются следующие условия:

1) $f(A)=\mathfrak{X}$ для любого нейтрального полиадического мультикольца A;

2) если $A\in\mathfrak{X}$, φ – гомоморфизм A, то $f(A)\subseteq f(A^{\varphi})\cap f(\mathrm{Ker}_{\varepsilon}\,\varphi)$, где $\mathrm{Ker}_{\varepsilon}\,\varphi = \{a\in A\mid a^{\varphi}=\varepsilon\}$.

Пусть f – $\mathfrak{X}$-экран, $K\subseteq H$ – идеалы полиадического мультикольца $A\in\mathfrak{X}$. Будем говорить, что фактор H/K f-централен в A, если $A/C_A(H/K)\in f(H/K)$. Ряд идеалов $\{\varepsilon\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t=A$, $t\geq 0$ полиадического мультикольца $A\in\mathfrak{X}$ назовем f-центральным, если все его факторы f-центральны в A. Обозначим через $<f>$ класс всех тех $A\in\mathfrak{X}$, которые обладают f-центральными рядами.

Несложная проверка показывает, что справедливы три следующие леммы.

Лемма 6. Пусть M, H, K и T – идеалы полиадического мультикольца А. Тогда

1) если $K\subseteq H$, то $K\subseteq C_A(H/K)$, причем $C_{A/K}(H/K)=\{(c,\overset{n-1}{K})\omega_n\mid c\in C_A(H/K)\}=C_A(H/K)/K$;

2) если $K\subseteq H\subseteq T$, то $C_{A/K}((T/K)/(H/K))=C_A(T/H)/K$.

Лемма 7. Пусть K, H и N – идеалы полиадического мультикольца $A, K\subseteq H$. Если H/K – f-централен в A, то факторы $(H\cdot N)/(K\cdot N)$ и $(H\cap N)/(K\cap N)$ также f-центральны в A.

Лемма 8. Пусть K, H и N – идеалы полиадического мультикольца $A, N\subseteq K\subseteq H$. Фактор H/K f-централен в A тогда и только тогда, когда фактор $(H/N)/(K/N)$ f-централен в A/N.

Теорема. Пусть f – произвольный $\mathfrak{X}$-экран. Тогда $<f>$ – непустая формация.

Доказательство. Класс $<f>$ непуст, так как ему принадлежат все нейтральные полиадические мультикольца.

Пусть $A\in<f>$ и $\{\varepsilon\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t=A$ f-центральный ряд A. Пусть N – идеал A. Рассмотрим ряд идеалов

$$(A_0\cdot N)/N\subseteq (A_1\cdot N)/N\subseteq\ldots\subseteq (A_t\cdot N)/N=A/N$$

фактор-алгебры A/N. В силу леммы 6 он f-централен в A/N. Таким образом, $A/N\in<f>$, т.е. $<f>$ – полуформация.

Пусть N_1 и N_2 – идеалы в A, причем A/N_1 и $A/N_2\in<f>$. Не ограничивая общности доказательства, считаем, что $N\cap N=\{\varepsilon\}$. Покажем, что $A\in<f>$.

По определению A/N и A/N обладают f-центральными рядами соответственно

$$N_1/N_1=H_0/N_1\subseteq H_1/N_1\subseteq\ldots\subseteq H_t/N_1=A/N_1$$

и

$$N_2/N_2=K_0/N_2\subseteq K_1/N_2\subseteq\ldots\subseteq K_r/N_2=A/N_2.$$

Рассмотрим ряд:

$$\{\varepsilon\}=K_0\cap N_1\subseteq K_1\cap N_1\subseteq\ldots\subseteq K_r\cap N_1=N_1=H_0\subseteq\ldots\subseteq H_t=A. \qquad (*)$$

Согласно лемме 8, f-центральность фактора $(H_i/N_1)/(H_{i-1}/N_1)$ в A/N_1 влечет f-центральность фактора H_i/H_{i-1} в A, $i\in\{1,\ldots,t\}$. Итак, факторы H_1/H_0, $H_2/H_1,\ldots,$ H_t/H_{t-1} – f-центральны в A.

Заметим, что K_i/K_{i-1} – f-централен в A (согласно лемме 8). Тогда, по лемме 7, $(K_i\cap N_1)/(K_{i-1}\cap N_1)$ – f-центральны в A. Поэтому ряд (*) f-централен в A. Теорема доказана.

В частности, из этой теоремы, если групповая операция ω_n является бинарной (т.е. когда полиадическое мультикольцо является просто мультикольцом), получаем известные результаты из [2].

Если же $\Omega=\varnothing$, т.е. полиадическое мультикольцо является n-арной группой, то получаем

Следствие. Класс n-арных групп, каждая из которых содержит единицу и обладает f-центральными рядами, является непустой формацией.

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М., 1978.
2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
3. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. Мн., 1992.
4. Воробьев Г.И. // Вопр. алгебры. Гомель, 1996. Вып.8. С.40.
5. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. М., 1974.
6. Тютин В.И. // Вопр. алгебры. Мн., 1989. Вып.3. С.86.

Поступила в редакцию 19.12.97.

УДК 512.542

Х.А.АЛЬ-ШАРО (ИОРДАНИЯ)

НОВОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ЭКРАНОВ

In this work we give a new description of the minimal local screen of formations.

Все рассматриваемые нами группы конечны. Мы базируемся на терминологии, использованной в [1–3]. В частности, согласно [1], через B^p мы будем обозначать класс всех монолитических групп G с нефраттиниевым абелевым монолитом $R\subseteq O_p(G)$.

При изучении локальных формаций большую роль играют так называемые минимальные локальные экраны формаций, которые можно определить как пересечение всех локальных экранов данной формации. Как известно, понятие локальных экранов впервые было введено Л.А.Шеметковым в [2]. Там же была поставлена проблема описания минимального локального экрана формаций. Решение этой проблемы было получено в работе [4]. В данной статье мы дадим новое описание минимальных локальных экранов формаций.

Лемма 1. Пусть G – примитивная группа третьего типа и M – максимальная подгруппа группы G, где $M_G=1$. Тогда, если N и R – минимальные нормальные подгруппы группы G, то

$$G/N\cong G/R\cong M$$

– примитивная группа второго типа.

Доказательство. Заметим, что

$$C=C_G(N)=C\cap G=C\cap RM=R(C\cap M).$$

При этом понятно, что $C\cap M$ – нормальная подгруппа группы G. Но $M_G=1$. Значит, $C\cap M=1$. Поэтому $C=R$. Так как $C\cap M=1$, то, ввиду G-изоморфизма

$$NR/R\cong N/N\cap R=N/1,$$

имеем

$$C_{G/R}(NR/R)=C_G(NR/R)/R=C_G(N)/R=R/R$$

– единица группы G/R. Значит, NR/R – минимальная нормальная подгруппа в G/R. Так как эта подгруппа неабелева, то по теореме 12.5 главы A [1] имеем $G/R\cong M$ – примитивная группа второго типа. Лемма доказана.

Проверка показывает, что справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $p\in\pi(G)$. Тогда в G имеется хотя бы один нефраттиниевый pd-главный фактор.

Лемма 3. Пусть G – такая группа, что $O_p(G)\cap\Phi(G)=1$. Тогда если H/K – фраттиниевый pd-главный фактор группы G, то $H\not\subseteq O_p(G)$, $H\neq O_p(G)$.

Доказательство. Если $K=1$, то

$$H/K=H/1\subseteq O_p(G)\cap\Phi(G)=1.$$

Противоречие. Значит, $K\neq 1$. Пусть $L\subseteq K$, где L – минимальная нормальная подгруппа группы G. Покажем, что

$$\Phi(G/L)\cap O_p(G/L)=L/L.$$

От противного. Пусть $\Phi(G/L)\cap O_p(G/L)\neq 1$ и T/L – минимальная нормальная подгруппа группы G/L такая, что

$$T/L\subseteq\Phi(G/L)\cap O_p(G/L)=\Phi(G/L)\cap O_p(G)/L.$$