УДК 512.542

В.В.КУРСОВ

# ОБОБЩЕННЫЕ СРЕЩЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АЛГЕБР

A generalization of the classical theory of crossed products is presented.

Традиционное скрещенное произведение поля и его группы Галуа, впервые появившееся у Э.Нётер, до сих пор продолжает оставаться одним из наиболее эффективных приемов изучения конечномерных алгебр. Эта конструкция, применяемая для решения различных задач, анализировалась с разных точек зрения ([1]–[3]). В [4] проводится подробное исследование обобщенных скрещенных произведений простой конечномерной алгебры с конечной группой автоморфизмов при некотором условии, гарантирующем простоту скрещенного произведения. Задача исследования обобщенных скрещенных произведений затруднена в первую очередь потому, что такие произведения не являются в общем случае простыми алгебрами. В [5] указан критерий простоты и описаны простые компоненты в случае скрещенного произведения простой алгебры и конечной циклической группы.

В настоящей статье рассматривается обобщенное скрещенное произведение конечномерной полупростой алгебры и бесконечной циклической группы.

Пусть $G$ – произвольная группа, $A$ – алгебра над полем $F$, $A^*$ – группа обратимых элементов в $A$, $\mathrm{Aut}_F(A)$ – группа $F$-автоморфизмов алгебры $A$, мы также предполагаем, что поле $F$ содержится в центре алгебры $A$.

*Определение 1.* Обобщенной системой факторов на группе $G$ со значениями в $A^*$ называется пара отображений $(w,f)$ $w{:}\,G\to\mathrm{Aut}_F(A)$, $f{:}\,G\times G\to A^*$ таких, что если $\mathrm{Inn}(a)$ обозначает внутренний автоморфизм $A$, индуцированный элементом $a$, то выполнены условия

$$w_\sigma w_\tau = w_{\sigma\tau}\cdot \mathrm{Inn}\, f(\sigma,\tau) \text{ для всех } \sigma,\tau\in G,$$

$$w_\sigma[f(\tau,\nu)]\, f(\sigma,\tau\nu) = f(\sigma,\tau)\cdot f(\sigma\tau,\nu) \text{ для всех } \sigma,\tau,\nu\in G.$$

*Определение 2.* Пусть $(w,f)$ – обобщенная система факторов на $G$ со значениями в $A^*$. Свободный правый $A$-модуль $(A,G,w,f)=\bigotimes_{\sigma\in G} z_\sigma A$ называется обобщенным скрещенным произведением алгебры $A$ и группы $G$, если выполнены соотношения

$$z_\sigma z_\tau = z_{\sigma\tau} f(\sigma,\tau) \text{ для } \sigma,\tau\in G,$$

$$a z_\sigma = z_\sigma w_\sigma(a) \text{ для } a\in A,\ \sigma\in G.$$

Легко видеть, что $(A,G,w,f)$ – ассоциативная алгебра, в которой при нужном изменении базисных элементов всегда можно добиться того, что будут выполнены соотношения $f(e,\sigma)=f(\tau,e)=E$, где $\sigma,\tau\in G$, $E$ – единица в $A$, $e$ – единица в $G$. В этом случае $z_1E$ является единицей скрещенного произведения. Для любого $x\in(A,G,w,f)$ определим его ранг $\mathrm{rank}(x)$ как число ненулевых элементов из $A$ в разложении $x$ по базису $z_\sigma$. Естественным образом определяется ранг любого подмножества из $(A,G,w,f)$.

Для полупростых в смысле Джекобсона алгебр имеет место следующая

**Теорема.** Пусть $A$ – полупростая конечномерная алгебра над полем $F$, характеристики не равной двум, $G=\langle\sigma\rangle$ – бесконечная циклическая группа. Тогда обобщенное скрещенное произведение $(A,G,w,f)$ также является полупростой алгеброй.

Доказательство. Обозначим $(A,G,w,f)=S$, $J\subset S$ – радикал. Используем формальное описание элементов из $J$ при помощи квазиобратных элементов ([6]): для любого $x\in J$ существует такой $y\in S$, что имеет место равенство

$$x+y+xy=0. \tag{1}$$

Если $J\neq(0)$, то он имеет ранг $\mathrm{rank}(J)=r$. Если предположить, что $r=1$, то, используя формальное описание (1), легко показать, что в $A$ есть ненулевой радикал, что противоречит полупростоте $A$. Поэтому мы предполагаем, что $r>1$.

Поскольку $A$ – полупроста, то $A=B_1\otimes...\otimes B_n$, где для любого $i=\overline{1,n}$ $B_i$ – простая $F$-алгебра, являющаяся по теореме Веддербарна матричной алгеброй над некоторым телом. Рассмотрим в $J$ элемент вида $x=az_1+\sum_{i>0}a_iz_{\sigma^i}$, $a\neq 0$, $a_i\in A$, rank($x$)=$r$. Умножая слева и справа x на элементы вида $\{bz_1|\ b\in A\}$, а также сопрягая $x$ базисными элементами $\{z_{\sigma^i}|i\in Z\}$, получим некоторое множество элементов из $J$, которые аддитивно порождают $F$-подпространство в $J$, обозначаемое через $L(x,G)$. Каждый элемент из $L(x,G)$ обладает тем свойством, что если он ненулевой, то его ранг в точности равен $r$. Если мы рассмотрим множество всех коэффициентов при базисном элементе $z_1$ элементов из $L(x,G)$, то получим двусторонний идеал $L(a,G)$ в алгебре $A$, который обладает тем свойством, что $w_{\sigma^i}L(a,G)\subseteq L(a,G)$ для любого $i\in Z$. Поскольку $L(a,G)$ конечномерное $F$-пространство и $w_{\sigma^i}$ являются автоморфизмами, то в действительности $w_{\sigma^i}L(a,G)=L(a,G)$.

Согласно структурной теории полупростых алгебр, для некоторого центрального идемпотента $e=(1,...,1,0...0)$ из $s$ единиц имеем

$$L(a,G)=B_1\otimes...\otimes B_s,\quad L(a,G)=eA,\quad 1\leq s\leq n.$$

Таким образом, мы можем в $J$ найти элемент вида

$$y=ez_1+\sum_{i>0}a_iz_{\sigma^i},\qquad \mathrm{rank}(y)=r. \tag{2}$$

Покажем теперь, что все коэффициенты $a_i$ в (2) лежат в $L(a,G)$. В противном случае существует индекс $i_0$ такой, что

$$a_{i_0}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\alpha_{s+1},...,\alpha_n),\quad \alpha_i\in B_i,\quad \alpha_{s+1}\neq 0.$$

Тогда $(1-e)z_1y\in J$, причем имеет место равенство

$$(1-e)z_1y=(1-e)ez_1+(1-e)a_{i_0}z_{\sigma^{i_0}}+\sum_{i\neq i_0}(1-e)a_iz_{\sigma^i}=0\cdot z_1+(1-e)a_{i_0}z_{\sigma^{i_0}}+\sum_{i\neq i_0}(1-e)a_iz_{\sigma^i}\neq 0.$$

Поскольку rank$(1-e)z_1y<r$, мы получаем противоречие с выбором $r$. Покажем теперь, что все коэффициенты $a_i$ в разложении (2) обратимы. По доказанному $a_i=(\alpha_1^i,...,\alpha_s^i,0,...,0)$, где $\alpha_j^i\in B_j$. В матричной алгебре над телом всякий элемент либо обратим, либо является делителем нуля. Если предположить, например, что $\alpha_1^i$ – делитель нуля, то существует ненулевой $\beta_1^i\in B_1$ такой, что $\beta_1^i\alpha_1^i=0$. В этом случае элемент вида $(\beta_1^i,0,...,0)z_1y=(\beta_1^i,0,...,0)z_1+$ $+\sum_{j>0,j\neq i}(y_1^i,0,...,0)a_jz_{\sigma^j}\neq 0$ лежит в $J$ и имеет ранг, меньший чем $r$, что невозможно.

Согласно (1), для $y$ из (2) существует некоторый элемент

$$z=b_{i_0}z_{\sigma^{i_0}}+\sum_{j>i_0}b_jz_{\sigma^j}\in S$$

такой, что
$$y+z+yz=0. \tag{3}$$

Относительно наименьшего индекса $i_0$ элемента $z$ возможны следующие случаи.

1. Если $i_0<0$, то, сравнивая наименьшие члены в равенстве (3), получим $b_{i_0}+eb_{i_0}=0$. Умножим это равенство слева на $1-e$. В результате получим, что $2b_{i_0}=0$ при $b_{i_0}\neq 0$, что противоречит предположению о характеристике.

2. Если $i_0>0$, то сравнение наименьших членов в равенстве (3) дает $e=0$, что противоречит выбору идемпотента $e$.

3. Пусть $i_0=0$. Если все $b_j=0$, то равенство (3) имеет вид

$$ez_1+\sum_{i>0}a_iz_{\sigma^i}+b_0z_1+\left(ez_1+\sum_{i>0}a_iz_{\sigma^i}\right)b_0z_1=0. \tag{4}$$

Сравнение наименьших и наивысших членов в обеих частях равенства (4) дает следующие соотношения:

$$e+b_0+eb_0=0,\quad a_m+a_m w_{\sigma^m}(b_0)=0,\quad a_m\neq 0,\quad a_m\in L(a,G). \tag{5}$$

Поскольку $w_{\sigma^m}L(a,G)=L(a,G)$ и $e$ – единица в $L(a,G)$, то применение автоморфизма $w_{\sigma^m}$ к первому из соотношений в (5) дает равенство $e+w_{\sigma^m}(b_0)+ew_{\sigma^m}(b_0)=0$. Умножая последнее равенство слева на $a_m\in L(a,G)$, получим

$$a_m+a_m w_{\sigma^m}(b_0)+a_m w_{\sigma^m}(b_0)=0. \tag{6}$$

Отсюда, согласно (5), следует, что $a_m w_{\sigma^m}(b_0)=0$. Умножая первое из соотношений в (5) слева на $1-e$, получим $b_0=eb_0$. Это означает, что $b_0\in L(a,G)$. Поскольку идеал $L(a,G)$ инвариантен относительно автоморфизма $w_{\sigma^m}$ и по доказанному ранее $a_m$ обратим, то равенство $a_m w_{\sigma^m}(b_0)=0$ означает $b_0=0$, что противоречит предположению.

Предположим теперь, что среди коэффициентов $b_j$ элемента $z$ есть ненулевые, причем $b_t\neq 0$ – наивысший среди них. Покажем, что $b_t\in L(a,G)$. Сравнение коэффициентов при $z_{\sigma^t}$ в равенстве (3) дает

$$a_t+b_t+eb_t+a_t w_{\sigma^t}(b_0)=0. \tag{7}$$

Умножая (7) слева на $1-e$ и учитывая, что $a_t\in L(a,G)=eA$, мы получим $eb_t=b_t\in L(a,G)$. Тогда сравнение высших коэффициентов в равенстве (3) приводит к соотношению

$$a_m w_{\sigma^m}(b_t)f(\sigma^m,\sigma^t)=0. \tag{8}$$

Поскольку $b_t\in L(a,G)$ и элементы $f(\sigma^m,\sigma^t)$ и $a_m$ обратимы в алгебре $A$, то из (8) следует, что $b_t=0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

1. Albert A. A. // Ann. of Math. 1942. V.43. P.708.
2. Jacobson N. // Ann of Math. 1942. V.45. P.705.
3. Бовди А. А. // Сиб. мат. журн. 1963. Т.IV. №3. С.481.
4. Курсов В. В., Янчевский В. И. // ДАН БССР. 1988. Т.32. №9.
5. Курсов В. В. // Изв. АН БССР. 1991. №1. С.8.
6. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972.

Поступила в редакцию 14.01.97.

УДК 519.712.2

*В.А.МОЩЕНСКИЙ, В.В.МОЩЕНСКИЙ*

# ОДНО СВОЙСТВО ЕМКОСТНОЙ СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ УНАРНОЙ ЗАПИСИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Memory computational complexity of every recursive function $f(x_1,\dots,x_n)$ is bounded by a linear polynomial $P(x_1,x_2,\dots,x_n,\ f(x_1,\dots,x_{n-1},m_i),\ f(x_1,\dots,x_n),m_i,m_j)$, $(m_i<x_n, m_j\leq f(x_1,\dots,x_n))$ when natural numbers are represented by words $1^{(n)}(n\geq 1)$.

Известно, что существуют сколь угодно сложновычислимые функции для любой меры сложности вычислений ([1], теорема 2). Одной из таких мер является длина рабочей зоны (или емкостная сложность) вычислений одноленточной одноголовочной детерминированной машины Тьюринга (МТ) ([2],с.22). Следовательно, емкостная сложность вычислений таких машин также может быть сколь угодно большой. Здесь доказывается, что емкостная сложность вычисления на указанных машинах каждой рекурсивной функции при унарной записи натуральных чисел может быть ограничена сверху линейным полиномом (с положительными коэффициентами), зависящим от аргументов этой функции, их числа, некоторых величин и значений самой функции, причем эти величины ограничены сверху. В доказательстве этого факта существенно используется одно свойство унарной записи натуральных чисел и значений рекурсивных функций на лентах указанных машин (далее оно называется свойством унарности).