



УДК 519.10

Р.А.БЕРДЫШЕВА, В.А.ЕМЕЛИЧЕВ

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО ОПТИМУМА ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ

The stability of lexicographic optimum of multicriterion problem on the system of subsets of the finite set with vector objective function representing the arbitrary combination of criteria often meeting in the combinatorial optimization problem has been investigated.

В [1–3] исследованы различные варианты устойчивости множества Парето векторной (многокритериальной) траекторной задачи к “малым” возмущениям параметров векторного критерия. Устойчивости эффективного (или оптимального, по Парето), слабо эффективного (или оптимального, по Слейтеру) и сильно эффективного решения траекторной задачи посвящены работы [4,5].

Широко известные лексикографические задачи оптимизации (см., напр., [6–9]) возникают в том случае, когда частные критерии упорядочены по важности, т.е. перенумерованы в соответствии с определенной перестановкой. В данной статье найдена нижняя достижимая оценка радиуса устойчивости лексикографически оптимальной траектории векторной задачи с произвольной комбинацией частных критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров. В качестве следствия получены необходимые и достаточные условия устойчивости траектории.

Рассмотрим следующую модель векторной комбинаторной задачи оптимизации.

Пусть задано конечное множество $E=\{e\}$ и совокупность $T=\{t\}$, $|T|>1$, непустых подмножеств этого множества, называемых траекториями. На множестве E зададим векторную весовую функцию $a(e)=(a_1(e), a_2(e), \dots, a_n(e)) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, а на множестве траекторий T – векторный критерий

$$f(t)=(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \\ f_i(t) \rightarrow \min_T \forall i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\},$$

частными критериями которого могут быть критерии трех видов

$$\text{MINSUM } f_i(t) = \sum_{e \in t} a_i(e) \rightarrow \min_T,$$

$$\text{MINMAX } f_i(t) = \max_{e \in t} a_i(e) \rightarrow \min_T,$$

$$\text{MINMIN } f_i(t) = \min_{e \in t} a_i(e) \rightarrow \min_T$$

в любой комбинации.

Обозначим через I_{sum} , I_{max} , I_{min} множества тех чисел из N_n , которыми занумерованы соответственно критерии MINSUM, MINMAX и MINMIN ($N_n = I_{\text{sum}} \cup I_{\text{max}} \cup I_{\text{min}}$).

Отметим, что эти критерии наиболее часто встречаются в задачах дискретной оптимизации. Первый из них называется линейным критерием, а второй – критерием “узкого места”.

Под векторной (n -критериальной) траекторной задачей обычно понимают задачу нахождения одного, некоторых (определенных) или всех элементов множества Парето. Очевидно, что в схему однокритериальных ($n=1$) траекторных задач вкладываются широко известные комбинаторные задачи на взвешенных графах (о коммивояжере, остове, паросочетании, пути, медианах, центрах и др.), задачи булева программирования и многие задачи теории расписаний. Здесь под траекторной будем понимать задачу поиска лексикографического множества, которое, являясь подмножеством множества Парето, определяется следующим образом (см. [6–9]).

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Для всякой перестановки $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$ в критериальном пространстве R^n вводится отношение лексикографического порядка векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$: $x \leq_s x'$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$1) x = x';$$

$$2) \exists k \in N_n \quad \forall i \in N_{k-1} (x_{s_k} < x'_{s_k} \& x_{s_i} = x'_{s_i}).$$

В случае, когда $k=1$, последние равенства отсутствуют.

Множество $L^n = \{L^n(s) : s \in S_n\}$, где $L^n(s) = \{t \in T : f(t) \leq_s f(t') \forall t' \in T\}$, называется лексикографическим, а его элементы — лексикографически оптимальными траекториями (ЛОТ).

Если пронумеровать все элементы множества $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, то векторную весовую функцию $a(e)$ можно представить в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$, где $a_{ij} = a_i(e_j)$. Изменяя матрицу $A \in R^{nm}$, будем получать различные весовые функции. Поэтому, если предположить, что множества E , T , I_{sum} , I_{max} и I_{min} зафиксированы, то матрица A может служить для индексации лексикографического множества L^n , которое будем обозначать через $L^n(A)$. В дальнейшем задачу нахождения этого множества будем обозначать через $Z^n(A)$, векторный критерий $f(t)$ — через $f(t, A)$, а частные критерии $f_i(t)$ — через $f_i(t, A)$. Кроме того, положим

$$\tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A).$$

Следующие свойства очевидны.

Свойство 1. Траектория $t \in L^n(A)$, если существует такой индекс $i \in N_n$, что $\tau_i(t, t', A) < 0 \forall t' \in T, t' \neq t$.

Свойство 2. Для любых двух матриц $A, B \in R^{nm}$ и любой траектории t справедливы равенства $f_i(t, A+B) = f_i(t, A) + f_i(t, B) \forall i \in I_{\text{sum}}$.

В пространстве R^{nm} матриц $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$ зададим чебышевскую норму $\|A\| = \max\{|a_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}$.

Свойство 3. Для любых двух матриц $A, B \in R^{nm}$ и любой траектории t справедливы неравенства

$$f_i(t, A) - \|B\| \leq f_i(t, A+B) \leq f_i(t, A) + \|B\| \forall i \in I_{\text{max}} \cup I_{\text{min}}.$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in R^{nm} : \|B\| < \varepsilon\}$.

По аналогии с [4], радиусом устойчивости траектории $t \in L^n(A)$ назовем число

$$\rho(t, A) = \begin{cases} \sup Q(t, A), & \text{если } Q(t, A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q(t, A) = \emptyset, \end{cases}$$

где $Q(t, A) = \{\varepsilon > 0 : t \in L^n(A+B) \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}$.

Таким образом, радиус устойчивости ЛОТ векторной задачи $Z^n(A)$ определяет предел возмущений элементов матрицы A , при которых лексикографическая оптимальность траектории сохраняется.

Для траекторий $t, t' \in T, t' \neq t$ введем обозначение

$$\gamma_i(t, t', A) = \begin{cases} -\frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}, & \text{если } i \in I_{\text{sum}}, \\ -\frac{\tau_i(t, t', A)}{2}, & \text{если } i \in I_{\text{min}} \cup I_{\text{max}}, \end{cases}$$

где $\Delta(t, t') = |t \setminus t' \cup t' \setminus t|$.

Лемма 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{nm}$. Для любого индекса $i \in I_{\text{sum}} \cup I_{\text{max}} \cup I_{\text{min}}$ справедливо утверждение: если $\gamma_i(t, t', A) > 0$, то для всякого числа φ такого, что $0 < \varphi \leq \gamma_i(t, t', A)$, верны неравенства

$$\tau_i(t, t', A+B) < 0 \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{R}(\varphi)$. Тогда $\|B\| < \gamma = \gamma_i(t, t', A)$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $i \in I_{\text{sum}}$. Тогда выводим

$$\tau_i(t, t', B) = \sum_{j \in N_m, e_j \in t \setminus t'} b_{ij} - \sum_{j \in N_m, e_j \in t' \setminus t} b_{ij} \leq \sum_{j \in N_m, e_j \in t \setminus t' \cup t' \setminus t} |b_{ij}| \leq \|B\| \Delta(t, t') < \gamma \Delta(t, t').$$

Отсюда с учетом свойства 2 и равенства $\tau_i(t, t', A) = -\gamma \Delta(t, t')$ получаем $\tau_i(t, t', A+B) = \tau_i(t, t', A) + \tau_i(t, t', B) < 0$.

Случай 2. $i \in I_{\text{max}} \cup I_{\text{min}}$. Тогда, согласно свойству 3, имеем

$$\begin{aligned} f_i(t, A+B) &\leq f_i(t, A) + \|B\|, \\ f_i(t', A+B) &\geq f_i(t', A) - \|B\|. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство $\tau_i(t, t', A) = -2\gamma$, выводим

$$\tau_i(t, t', A+B) \leq \tau_i(t, t', A) + 2\|B\| < \tau_i(t, t', A) + 2\gamma = 0.$$

Лемма 1 доказана.

Непосредственно из определения радиуса устойчивости ЛОТ вытекают следующие две леммы.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{nm}$, $t \in L^n(A)$. Если существует такое число $\varphi > 0$, что $t \in L^n(A+B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi)$, то $\rho(t, A) \geq \varphi$.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{nm}$, $t \in L^n(A)$, $\varphi \geq 0$, и для всякого числа $\varepsilon > \varphi$ найдется матрица $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$, удовлетворяющая условию

$$t \notin L^n(A+B).$$

Тогда для радиуса устойчивости траектории t справедлива оценка сверху $\rho(t, A) \leq \varphi$.

Введем обозначение

$$\varphi(t, A) = \max_{i \in N_n} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_i(t, t', A).$$

Очевидно, что $\varphi(t, A) \geq 0 \quad \forall t \in L^n(A)$, $A \in \mathbb{R}^{nm}$.

Теорема 1. При любой матрице $A \in \mathbb{R}^{nm}$ для радиуса устойчивости всякой ЛОТ t задачи $Z^n(A)$ с любой комбинацией критериев MINSUM, MINMAX и MINMIN справедлива оценка

$$\rho(t, A) \geq \varphi(t, A), \quad (1)$$

причем $\rho(t, A) = \varphi(t, A)$, если $I_{\text{sum}} = N_n$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}^{nm}$, $t \in L^n(A)$. Если $\varphi(t, A) = 0$, то неравенство (1) очевидно. Пусть $\varphi = \varphi(t, A) > 0$. Тогда $\mathfrak{R}(\varphi) \neq \emptyset$, и в силу определения числа φ найдется индекс $k \in N_n$ такой, что

$$0 < \varphi \leq \gamma_k(t, t', A) \quad \forall t' \neq t.$$

Отсюда с учетом леммы 1 получаем

$$\tau_k(t, t', A+B) < 0 \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Поэтому на основании свойства 1 выводим $t \in L^n(A+B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi)$ и, следовательно, в силу леммы 2 убеждаемся в справедливости неравенства (1).

Для доказательства достижимости нижней оценки достаточно показать, что при $I_{\text{sum}} = N_n$ имеем

$$\rho(t, A) \leq \varphi. \quad (2)$$

Пусть $\varepsilon > \varphi$. Тогда, согласно определению числа φ , для любого индекса $i \in N_n$ найдется такая траектория $t' \neq t$, что $\gamma_i(t, t', A) \leq \varphi < \varepsilon$.

Поэтому если в качестве возмущающей матрицы $B \in \mathfrak{H}(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -b, & \text{при } i \in N_n, e_j \notin t', \\ b, & \text{при } i \in N_n, e_j \in t', \end{cases}$$

где $\varphi < b < \varepsilon$, то, учитывая свойство 2, легко выводим

$$\tau_i(t, t', A + B) = \tau_i(t, t', A) + b\Delta(t, t') > \Delta(t, t')(\varphi - \gamma_i(t, t', A)) \geq 0.$$

Отсюда на основании свойства 1 траектория $t \notin L^n(A+B)$, следовательно, согласно лемме 3, получаем неравенство (2).

Суммируя все доказанное, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

ЛОТ t задачи $Z^n(A)$ назовем устойчивой, если $\rho(t, A) > 0$, и строгой, если существует индекс $i \in N_n$ такой, что $\tau_i(t, t', A) < 0 \forall t' \neq t$.

Следствие 1. Если векторный критерий $f(t, A)$ представляет собой любую комбинацию критериев MINSUM, MINMAX и MINMIN, то для того чтобы ЛОТ t задачи $Z^n(A)$ была устойчивой, достаточно, а в случае, когда $N_n = I_{\text{sum}}$, и необходимо, чтобы траектория t была строгой.

Заметим, что в силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см. [10]) следствие 1 справедливо не только для чебышевской, но и для других норм в пространстве R^m .

При переходе к однокритериальному случаю ($n=1$) лексикографическое множество $L^n(A)$ превращается в множество всех оптимальных траекторий задачи $Z^1(A)$. Поэтому однокритериальными аналогами теоремы 1 и следствия 1 являются следующие известные утверждения.

Теорема 1' [4]. Радиус устойчивости любой оптимальной траектории t^0 однокритериальной линейной (с критерием $f_1(t)$ вида MINSUM) траекторной задачи $Z^1(A)$ выражается формулой

$$\rho(t^0, A) = \min_{t \in T, t \neq t^0} \frac{\tau_i(t, t^0, A)}{\Delta(t, t^0)},$$

где $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$, $a_{ij} = a_1(e_j) \forall j \in N_m$.

Следствие 1' [4]. Для того чтобы оптимальная траектория однокритериальной задачи с любым из критериев MINSUM, MINMAX или MINMIN была устойчивой, достаточно, а в случае, когда критерий линейный, и необходимо, чтобы она была единственной оптимальной траекторией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (коды проектов Ф23-70 и Ф95-70) и Международной Соросовской программы образования в области точных наук (для второго автора).

1. Бакурова А.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т.39. №2. С.33.
2. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1995. №4. С.137.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т.40. №1. С.9.
4. Емеличев В.А., Гирлих Э., Подкопаев Д.П. // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1996. №3. С.5; 1997. №2. С.9.
5. Ефимчик Н.Е., Подкопаев Д.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №1. С.48.
6. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М., 1975.
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
8. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев, 1985.
9. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. // ЖВМ и МФ. 1988. Т.28. №3. С.400.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редакцию 13.11.96.