

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 2-го РОДА ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Integral equations by Volterra of the 2-nd kind flat sums of elasticity theory for rotating polar-orthotropic discs of variable thickness deduced. The formal solutions of these equations are obtained by the method of successive approximate values. Calculation formulas for displacements and stress components in the disc are given.

В работе с помощью интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода исследуется напряженно-деформированное состояние вращающихся полярно-ортотропных кольцевых дисков переменной толщины $h(r)$. Вращение происходит с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Внутренний радиус кольцевого диска равен r_0 , а внешний радиус – R .

В полярных координатах r, θ разрешающие дифференциальные уравнения плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины имеют вид [1, 2]

1) для 1-й основной задачи:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r} \left(\nu_{\theta r} \frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r} \right) \psi = -(3 + \nu_{\theta r}) h(r) \rho \omega^2 r, \quad (1)$$

где $\psi(r)$ – функция напряжений; $k^2 = \frac{E_{\theta}}{E_r}$, E_{θ} , E_r , $\nu_{\theta r}$ – упругие постоянные; ρ – плотность материала диска.

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_{\theta}(r)$ компоненты напряжений связаны с функцией напряжений $\psi(r)$ соотношениями

$$\sigma_r(r) = \frac{\psi(r)}{r h(r)}, \quad \sigma_{\theta}(r) = \frac{1}{h(r)} \frac{d\psi}{dr} + \rho \omega^2 r^2.$$

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r(r_0) = p_0, \quad \sigma_r(R) = p_1, \quad (2)$$

где p_0, p_1 – постоянные краевые нагрузки.

2) Для 2-й основной задачи

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \left(\nu_{\theta r} \frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r} \right) u = - \frac{(k^2 + \nu_{\theta r}^2)}{E_{\theta}} \rho \omega^2 r, \quad (3)$$

где $u(r)$ – радиальное перемещение в диске.

Граничные условия имеют вид

$$u(r_0) = U_0, \quad u(R) = U_1, \quad (4)$$

где U_0, U_1 – постоянные краевые смещения.

Приведем дифференциальные уравнения (1) и (3) к линейным интегральным уравнениям Вольтерра 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \varphi^{(1)}(r), \quad \frac{d^2u}{dr^2} = \varphi^{(2)}(r). \quad (5)$$

Последовательно интегрируя выражения (5), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dr} &= \int_{r_0}^r \varphi^{(1)}(s) ds + \psi'(r_0), \quad \frac{du}{dr} = \int_{r_0}^r \varphi^{(2)}(s) ds + u'(r_0), \\ \psi(r) &= \int_{r_0}^r (r-s) \varphi^{(1)}(s) ds + \psi'(r_0)(r-r_0) + \psi(r_0), \\ u(r) &= \int_{r_0}^r (r-s) \varphi^{(2)}(s) ds + u'(r_0)(r-r_0) + u(r_0).\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь использовалась формула

$$\underbrace{\int_{r_0}^r dr \int_{r_0}^r dr \dots \int_{r_0}^r \varphi(r) dr}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^r (r-s)^{n-1} \varphi(s) ds.$$

Подставляя в уравнения (1) и (3) вместо функций $\psi(r)$, $u(r)$ и их производных правые части выражений (5) и (6), получим искомые линейные интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода

$$\varphi^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_i(r, s) \varphi^{(i)}(s) ds + f_i(r), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где числовой параметр $\lambda = -1$;

$K_i(r, s) = \left[\left(\frac{1}{r} + (-1)^i \frac{h'(r)}{h(r)} \right) + \frac{1}{r} \left(v_{\theta r} \frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r} \right) (r-s) \right]$ – ядра интегральных уравнений; $f_1(r)$ и $f_2(r)$ – свободные члены интегральных уравнений, имеющие вид

$$\begin{aligned}f_1(r) &= \frac{\partial K_1(r, s)}{\partial s} r_0 h(r_0) \sigma_r(r_0) - K_1(r, r_0) h(r_0) \sigma_\theta(r_0) + \\ &\quad + [K_1(r, r_0) r_0^2 h(r_0) - (3 + v_{\theta r}) r h(r)] \rho \omega^2, \\ f_2(r) &= \frac{\partial K_2(r, s)}{\partial s} u(r_0) - K_2(r, r_0) u'(r_0) - \frac{(k^2 - v_{\theta r}^2)}{E_\theta} \rho \omega^2 r.\end{aligned}$$

В случае изотропных дисков $k^2 = 1$, $E_\theta = E$, $v_{\theta r} = \nu$ интегральные уравнения (7) не меняют своей структуры.

Для решения линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода применим метод последовательных приближений [3]:

$$\varphi_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_i(r, s) \varphi_{n-1}^{(i)}(s) ds + f_i(r), \quad i = 1, 2.$$

В качестве нулевого приближения примем $\varphi_0^{(i)} = 0$.

Если $f_i(r)$ непрерывны в $[r_0, R]$, а ядра $K_i(r, s)$ непрерывны при $r_0 \leq r \leq R$, $r_0 \leq s \leq r$, то последовательности $\{\varphi_n^{(i)}(r)\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к решениям $\varphi^{(i)}(r)$ интегральных уравнений (7):

$$\varphi^{(i)}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{(i)}(r).$$

Радиальная $\sigma_r(r)$, тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений и радиальное перемещение $u(r)$ во вращающемся полярно-ортотропном диске переменной толщины рассчитываются по следующим формулам:

1) для 1-й основной задачи:

$$\begin{aligned}u(r) &= \frac{1}{E_\theta} \frac{1}{h(r)} \left\{ \int_{r_0}^r [(1 - v_{\theta r}) r + v_{\theta r} s] \varphi^{(1)}(s) ds + (1 - v_{\theta r}) h(r_0) \sigma_\theta(r_0) r + \right. \\ &\quad \left. + v_{\theta r} r_0 h(r) [\sigma_\theta(r_0) - \sigma_r(r_0)] - [(1 - v_{\theta r}) r + v_{\theta r} r_0] r_0^2 h(r_0) - h(r) r^3 \right\} \rho \omega^2, \\ \sigma_r(r) &= \frac{1}{r h(r)} \left\{ \int_{r_0}^r (r-s) \varphi^{(1)}(s) ds + h(r_0) \sigma_\theta(r_0) r - h(r_0) [\sigma_\theta(r_0) - \sigma_r(r_0)] r_0 - h(r_0) r_0^2 (r-r_0) \rho \omega^2 \right\}, \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{1}{r(r)} \left\{ \int_{r_0}^r \varphi^{(1)}(s) ds + h(r_0) \sigma_\theta(r_0) r + [h(r) r^2 - h(r_0) r_0^2] \rho \omega^2 \right\};\end{aligned}\quad (8)$$

2) для 2-й основной задачи:

$$u(r) = \left[\int_{r_0}^r (r-s) \varphi^{(2)}(s) ds + u'(r_0)(r-r_0) + u(r_0) \right],$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E_\theta}{(k^2 - \nu_{\theta r})} \frac{1}{r} \left\{ \int_{r_0}^r [(1 + \nu_{\theta r})r - \nu_{\theta r}s] \varphi^{(2)}(s) ds + [(1 + \nu_{\theta r})r - \nu_{\theta r}r_0] u'(r_0) + \nu_{\theta r}u(r_0) \right\}, \quad (9)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E_\theta}{(k^2 - \nu_{\theta r}^2)} \frac{1}{r} \left\{ \int_{r_0}^r [(k^2 + \nu_{\theta r})r - k^2s] \varphi^{(2)}(s) ds + [(k^2 + \nu_{\theta r})r - k^2r_0] u'(r_0) + k^2u(r_0) \right\}.$$

Неизвестные постоянные величины $\sigma_r(r_0)$, $\sigma_\theta(r_0)$ или $u'(r_0)$, $u(r_0)$ определяются из граничных условий (2) или (4).

Приведенные формулы (8) и (9) полностью определяют напряженно-деформированное состояние в диске.

1. Бурмистров Е.Ф., Маслов Н.М. // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Саратов, 1970. Вып. 5. С. 80.

2. Paul A.K. // Indian J. of Technology. 1974. Vol. 12. P. 430.

3. Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.

Поступила в редакцию 16.09.09.

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель Русского международного свободного университета (г. Прага, Чехия).

Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент, декан механико-математического факультета.