ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНЫ ОПЦИОНОВ И ФЬЮЧЕРСОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

П. В. Бауэр

Понятие случайного (стохастического) процесса является расширением понятия случайной величины. Можно сказать, что случайный процесс - это семейство случайных величин, эволюционирующих во времени. Теория случайных процессов - это новейший раздел теории вероятностей, активно развивающийся начиная с 20-30-х годов нашего столетия.

Пусть $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ будет последовательностью независимых и одинаково распределённых случайных величин с кумулятивной функцией распределения $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$.

Тогда случайный процесс определённый как:

$$X_0 = 0$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,, n \geq 1$$

является случайным блужданием.

МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ (CTRW)

Динамика цен на финансовых рынках может быть представлена как случайное блуждание в непрерывном времени.

Существует множество способов представления случайных блужданий в непрерывном времени. Здесь, представлен подход так называемого непрерывного случайного блуждания, в котором интервалы между шагами являются непрерывными случайными величинами.

Пусть $S(t)$ будет ценой актива в момент времени t. На реальном рынке цены фиксируются, когда спрос и предложение встречаются, и совершается сделка. В этом случае говорят, что происходит торговля. В теории финансов гораздо чаще рассматриваются доходности, чем цены. По этой причине в дальнейшем примем во внимание переменную $x(t) = \ln S(t)$, равную натуральному логарифму от цены. Для маленького изменения цены $\Delta S = S(t_{i+1}) - S(t)$, доходность $r = \Delta S / S(t_i)$ и логарифмическая доходность $r_{ln} = ln[S(t_{i+1})/S(t_i)]$ практически совпадают.

На финансовых рынках не только цены, которые могут быть промоделированы как случайные величины, но также и время ожидания между двумя последовательными транзакциями изменяются случайным образом. Поэтому временной ряд $\{x(t_i)\}$ характеризуется совокупной плотностью вероятности скачков $\xi_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ и времён ожидания $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Множественная плотность вероятности удовлетворяет условию нормализации $\iint \varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau = 1$.

Монтролл и Вайс предложили применить преобразование Фурье-Лапласа к $p(x,t)$, функции плотности вероятности, где x в нашем случае значение натурального логарифма от цены актива к времени t, задано как:

$$\tilde{\hat{p}}(\kappa,s) = \frac{1-\tilde{\psi}(s)}{s}\frac{1}{1-\tilde{\hat{\varphi}}(\kappa,s)}, \tag{1}$$

где

$$\tilde{\hat{p}}(\kappa,s) = \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st+i\kappa x} p(x,t)dx \tag{2}$$

и $\psi(\tau) = \int \varphi(\xi,\tau)d\xi$ это функция плотности вероятности времени ожидания.

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой время ожидания и размер скачка являются независимыми случайными величинами. В этом случае совокупная функция плотности вероятности φ может быть разложена на множители, на пространственную и временную части: $\varphi(\xi,\tau) = \lambda(\xi)\psi(\tau)$. Здесь $\lambda(\xi)$ – это вероятность смещения на один шаг (функция плотности вероятности смещения). Тогда условие нормализации для данной функции должно выполняться. То есть $\int \lambda(\xi)d\xi = 1$ и $\int \psi(\tau)d\tau = 1$.

В итоге получаем:

$$\tilde{\hat{p}}(\kappa,s) = \frac{1-\tilde{\psi}(s)}{s}\frac{1}{1-\hat{\lambda}(\kappa)\tilde{\psi}(s)}, \tag{3}$$

где $\hat{\lambda}(\kappa)$, преобразование Фурье функции плотности вероятности смещения, которую обычно называют структурной функцией случайного блуждания и $\tilde{\Psi}(s) = \left(1-\tilde{\psi}(s)\right)/s$ – преобразование Лапласа следующей функции:

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \psi(t')dt' = 1 - \int_0^t \psi(t')dt', \tag{4}$$

где $\Psi(t)$ – это вероятность выживания в начальной позиции $(t_0 = 0)$. $\int_0^t \psi(t')dt'$ представляет вероятность того, что хотя бы один шаг происходит в интервале времени $(0,t)$, следовательно $\Psi(t)$ –это вероятность того, что значение натурального логарифма цены актива не изменяется в течении интервала времени t после скачка.

По Вайсу $\Psi(t)$ может быть рассмотрена как вероятность того, что длительность данного интервала между успешными шагами строго

(5)

больше чем t и что специфическая функция необходима для того, чтобы определить вероятность смещения в момент времени $t^* + t$ по непрерывным случайным блужданиям, где t^* - мгновение последнего скачка. Функция плотности вероятности времени ожидания взаимосвязана с $\Psi(t)$ как показано в формуле:

$$\psi(t) = -d\Psi(t)/dt.$$

Заметим, что, в общем, непрерывные случайные блуждания это немарковская модель, так как в любое время нужно знать размер скачка, а также время последнего скачка для того, чтобы предсказать дальнейший курс случайного блуждания. Немарковское свойство возникает потому, что время предыдущего шага различается и может быть даже $t = 0$, что означает: во все моменты времени необходимо рассматривать полную историю процесса. Только марковская версия непрерывных случайных блужданий имеет функцию плотности вероятности времени ожидания $\psi(\tau)$ с отрицательной экспонентой:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{T} exp(-\tau/T), \tag{6}$$

где T – среднее время между успешными шагами.

Только для данной формы плотности вероятности, вероятность того, что шаг случайного блуждания произойдёт в интервале времени $(t, t + dt)$будет равна dt/T, если $dt \to 0$, независимо от времени, при котором произошёл шаг. Это не верно для других форм функции $\psi(\tau)$.

Главное уравнение относительно функции плотности вероятности непрерывного случайного блуждания может быть получено инвертированием преобразования Фурье-Лапласа в уравнении (3). Переписывая уравнение (3) как:

$$\tilde{\hat{p}}(\kappa, s) = \tilde{\Psi}(s) + \tilde{\psi}(s)\hat{\lambda}(\kappa)\tilde{\hat{p}}(\kappa, s), \tag{7}$$

мы получаем уравнение для цены актива (в т. ч. опционов, фьючерсов):

$$p(x,t) = \delta_{x0}\Psi(t) + \int_0^t \psi(t - t')dt' \int_{-\infty}^{+\infty} p(x', t')\lambda(x - x')dx \tag{8}$$

Следующее представление формулы показывает всю нелокальную и немарковскую сущность непрерывных случайных блужданий:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \int_0^t \phi(t - t')\left[-p(x,t') + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x - x')p(x', t')dx'\right]dt \tag{9}$$

здесь ядро $\phi(t)$ определено через преобразование Лапласа,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{s\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)}. \tag{10}$$

Приведённые выше уравнения позволяют посчитать $p(x,t)$ из знаний функций плотности вероятности скачков $\lambda(\xi)$ и времени ожидания $\psi(\tau)$. В принципе, обе эти функции могут быть эмпирически доступны из информации финансового рынка, на котором очень часто происходят сделки. [1]

КРИТИКА ОСНОВНОГО ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ CTRW

Можно покритиковать предположение, что лог-доходности описываются с помощью нормального совокупного процесса Пуассона, что является основным предположением модели CTRW, фактами, выведенными эмпирически Скаласом в ходе проверки по тиковым данным:

1. Эмпирическое распределение тиковых лог-доходностей островершинное, а нормальный процесс Пуассона имеет нормальное распределение, то есть оно имеет нормальный эксцесс.
2. Эмпирическое распределение длительностей не экспоненциально с избытком стандартного отклонения, в то время как нормальный совокупный процесс Пуассона предполагает экспоненциальное распределение.
3. Автокорреляция модулей лог-доходностей снижается медленно, в то время как при нормальном совокупном процессе Пуассона предполагает независимые одинаково распределённые лог-доходности.
4. Лог-доходности и времена ожидания не независимы, в то время как нормальный совокупный процесс Пуассона предполагает их независимость.
5. Волатильность и активность торгов изменяется в течении торгового дня, в то время как при нормальном совокупном процессе Пуассона они предполагаются постоянными.[1]

Скалас делал проверку по тиковым данным цен акций General Electric за октябрь 1999. [2] Я использовал тиковые данные цен акций Microsoft Corp. за один день – 16.05.2014г и проверил, так же как и в [2].

Эмпирическая проверка по моим данным прямо подтверждает пункты 3., 4. и 5., приведённой выше критики.

Литература

1. Fractional calculus and continuous-time finance / Enrico Scalas, Rudolf Gorenflo, Francesco Mainardi // Physica A, Vol. 287, No 3-4, 468-481 (2000) – Proceedings of the International Workshop on "Economic Dynamics from the Physics Point of View", Bad-Honnef (Germany), 27-30 March 2000 – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0001120v1 – Дата доступа: 25.09.2013
2. Waiting-times and returns in high-frequency financial data: an empirical study / Marco Roberto, Enrico Scalas, Francesco Mainardi // Presented at the International Workshop "Horizons in Complex Systems", Messina, Italy, December 2001 – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0203596v1 – Дата доступа: 25.09.2013.