

АНАЛИЗ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ SVAR С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИМИСЯ КЛАССАМИ СОСТОЯНИЙ

П. А. Мойсенья, В. И. Малюгин

Для описания стационарных экономических временных рядов используются различные типы векторных авторегрессионных моделей (vector autoregressive models – VAR) [1]. Для анализа экономической политики наибольшее применение получили структурные VAR (structural VAR – SVAR) [2], которые позволяют учесть обусловленные экономической теорией ограничения на параметры модели. Наличие циклических изменений в макроэкономических процессах обуславливает важность разработки и применения специального вида моделей SVAR с переключающимися классами состояний (regime-switching SVAR или RS-SVAR) [3]. При построении моделей RS-SVAR возникает задача определения текущего или ожидаемого класса состояния моделируемой экономической системы. В данной статье для решения этой задачи предлагается использовать решающее правило дискриминантного анализа авторегрессионных моделей с экзогенными переменными VARX [4].

Исходной моделью для перехода к SVAR является модель VARX(p) с пространственной автокорреляцией ошибок вида

$$y_t = B_0 + B_1 y_{t-1} + \dots + B_p y_{t-p} + C z_t + u_t, \quad (1)$$

где $u_t \in \mathbb{R}^N$ ($t=1, \dots, T$) – векторный процесс белого шума, имеющий недиагональную ковариационную матрицу.

Предполагается, что для случайного вектора ошибок $u_t \in \mathbb{R}^N$ существует декоррелирующее преобразование

$$A u_t = B \varepsilon_t, \quad (2)$$

позволяющее перейти к взаимно некоррелированным «структурным шокам» [1] $\{\varepsilon_{ti}\}$, которые являются компонентами векторного процесса белого шума $\varepsilon_t = (\varepsilon_{ti}) \in \mathbb{R}^N$ с диагональной ковариационной матрицей.

Модель SVAR(p), построенная на основе (1) и (2) с учетом обозначения $A^{-1}B = G$ ($G^{-1} = B^{-1}A$), определяется уравнением

$$G^{-1} y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + G^{-1} C z_t + \varepsilon_t, \quad (3)$$

В формулах (1)–(3) используются обозначения: $y_t = (y_{ti}) \in \mathbb{R}^N$ – вектор-столбец N эндогенных переменных в момент времени t , $B_l = (B_{lij})$, $A_l = (A_{lij}) = G^{-1} B_l$ ($l=1, \dots, p$) – $(N \times N)$ -матрицы коэффициен-

тов авторегрессии; $z_t = (z_{tj}) \in Z \subset \mathbb{R}^M$ – вектор экзогенных переменных, $C - (N \times M)$ -матрица коэффициентов при экзогенных переменных в исходной VARX-модели.

Значения матриц A, B, G , определяющих декоррелирующее преобразование в (3), задаются на основе экономических предположений. Каждое из N уравнений в (3) можно интерпретировать как формулировку обычных макроэкономических тождеств, например, таких как кривая Филлипса, кривая IS, правило Тейлора [2].

Различные режимы функционирования макроэкономических процессов математически могут быть описаны с помощью RS-SVAR-модели с неоднородной параметрической структурой, которая обусловлена существованием различных классов состояний. Для многих исследований актуальным является модель RS-SVAR с априорно заданными L ($L \geq 2$) классами состояний [3]:

$$G^{-1}y_t = A_{d(t),0} + \sum_{l=1}^p A_l y_{t-l} + G^{-1}C_{d(t)}z_t + \varepsilon_t, \quad (4)$$

где $\{C_\alpha\}$ матрицы коэффициентов при экзогенных переменных в исходной VARX-модели для различных классов состояний ($\alpha \in S(L) = \{1, \dots, L\}$).

Предполагается, что номер класса состояния сложной системы $d_t \equiv d(t) \in S(L)$ в момент времени t ($t = 1, \dots, T$), описывается дискретной случайной величиной с распределением вероятностей [4]:

$$P\{d_t = \alpha\} = \pi_\alpha > 0 (\alpha \in S(L)), \quad \sum_{\alpha \in S(L)} \pi_\alpha = 1. \quad (5)$$

В случае (5) остатки модели SVAR вида (4) могут быть определены по формуле:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha,t} = G^{-1}y_t - A_0 - \sum_{l=1}^p A_l y_{t-l} - G^{-1}C_\alpha z_t. \quad (6)$$

В данном исследовании для оценивания текущего класса состояния α экономической системы предлагается использовать решающее правило поточечной классификации многомерных временных рядов, описываемых моделью (4).

При условии, что истинные значения параметров (3), (4) известны, для заданных начальных значений $y_{t-p}, \dots, y_{t-1} \in \mathbb{R}^N$ оптимальным в смысле вероятности ошибки решающим правилом классификации состояний системы в момент времени t по наблюдениям (y_t, z_t) ($t = 1, \dots, T$) является байесовское решающее правило (БРП) вида [4]:

$$d_0(y_t; z_t) = \arg \min_{\alpha \in S(L)} \left\{ \text{tr}(\Sigma_\alpha^{-1} S_\alpha) + \ln |\Sigma_\alpha| - \frac{2 \ln \pi_\alpha}{T} \right\}, \quad (7)$$

где

$$S_{\alpha,t} = \bar{\varepsilon}_{\alpha,t} \bar{\varepsilon}_{\alpha,t}', \quad (8)$$

$\bar{\varepsilon}_{\alpha,t}$ определяется по формуле (6).

Экспериментальное исследование БРП (7), (8) проводится на основе макроэкономической модели IS-LM [1], включающей вектор эндогенных переменных $y_t = (q_t, i_t, m_t)'$, ($N=3, M=1, p=2$), где q_t – логарифм реального валового национального продукта (ВВП), i_t – трехмесячная банковская процентная ставка и m_t – логарифм реальной денежной базы. В качестве общего для всех уравнений экзогенного фактора используется линейный тренд: $\tilde{z} = t$ ($t=1, \dots, T$). Ограничения вида (2), необходимые для построения структурной составляющей модели, получены из теории IS-LM модели. Предполагается, что в каждый момент времени возможен один из двух классов ($L=2$) состояний с априорными вероятностями $\pi_\alpha = 0.5$ ($\alpha=1, 2$). разным классам состояний соответствуют различные значения вектора коэффициентов при экзогенных переменных, т.е.: $C_0 \neq C_1, A_{\alpha,i} = A_i$ ($i=\overline{0,2}$), $G_\alpha = G$. На основе содержательной интерпретации показателей, включенных в модель, были описаны следующие возможные классы состояний экономической системы: равномерное развитие экономики (РР), рецессия или отрицательный рост экономики (ОР) и ускоренный рост экономики (УР). Задача заключается в определении класса состояния экономики из двух возможных классов состояний (НР, ОР) либо (НР, УР) по текущим значениям анализируемых экономических переменных.

Рассматриваются три следующих сценария, различающиеся степенью различимости классов состояний, характеризуемой межклассовое расстояние Махаланобиса $\Delta(\tilde{z})$.

Хорошо различимые классы состояний РР и ОР, которым соответствуют параметры

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0014 \\ 0.0007 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} -0.0007 \\ 0.0039 \\ -0.0007 \end{bmatrix}.$$

Слабо различимые классы состояний РР и УР:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0014 \\ 0.0007 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0014 \\ 0.0009 \end{bmatrix}.$$

Средняя степень различимости классов состояний РР и УР:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0014 \\ 0.0007 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0006 \end{bmatrix}.$$

Для всех временных рядов с помощью статистического моделирования была получены экзаменационные реализации длиной $T^E = 200$, $T_0^E = T_1^E = T^E / 2 = 100$. В качестве показателей точности БРП используются верхняя оценка ошибки решающего правила $r_0(\tilde{z})$, оценки условных вероятностей ошибок $\hat{r}_\alpha^E$ и безусловной вероятности ошибки $\hat{r}^E$ [4]. Результаты, представленные в таблице, свидетельствуют о приемлемой точности классификации с помощью БРП (7), (8) для сценариев 1, 3, во всех экспериментах значение $\hat{r}^E > r_0(\tilde{z})$ ($\forall \tilde{z}$). Для сценария 2, как и ожидалось, классы состояний плохо разделимы.

Таблица 1

Зависимость точности классификации от межклассового расстояния

Вариант	$\Delta(\tilde{z})$	$r_0(\tilde{z})$	$\hat{r}_0^E$	$\hat{r}_1^E$	$\hat{r}^E$
1	5.643	0.069	0.03	0	0.03
2	0.299	0.471	0.05	0.96	0.465
3	1.912	0.217	0.12	0	0.12

Проведенное исследование показывает, что предлагаемое БРП может использоваться для построения подстановочных БРП на основе реальных данных.

Литература

1. *Lutkepohl H.* Introduction to Multiple Time Series Analysis, second edition. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
2. *Sims C.* Are forecasting models usable for policy analysis? // Quarterly Review –1986. Vol. 10, №1 – P. 2–16
3. *Hamilton J.* Time Series Analysis. USA: Princeton university press, 1994.
4. *Малюгин, В. И.* Дискриминантный анализ многомерных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2013. – № 3. – С. 43–53.