

5. ДАЛЬНЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Определенный интерес представляет вопрос о полном описании класса $K_{1,4}$ -ограниченных плоских триангуляций. Заметим, что данный класс графов включает в себя все $K_{1,3}$ -свободные плоские триангуляции, поскольку класс $K_{1,4}$ -ограниченных графов является естественным расширением класса $K_{1,3}$ -свободных графов.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ – класс графов, порождаемых окружениями вершин $K_{1,4}$ -ограниченных плоских триангуляций. Заметим, что простой цикл C_6 принадлежит классу $\mathcal{Q}$. Поэтому получить полное описание всех связных локально $\mathcal{Q}$ -графов не представляется возможным (см., например, [4]). Учитывая этот факт, имеет смысл не отбрасывать условие планарности таких графов. В этом случае ситуация, когда окружение каждой вершины графа порождает подграф, изоморфный C_6 , невозможна. Таким образом, вопрос о полном описании всех связных планарных локально $\mathcal{Q}$ -графов и, в частности, $K_{1,4}$ -ограниченных плоских триангуляций, остается открытым.

Литература

1. *Plummer M.D.* Claw-free maximal planar graphs // Congr. Numer. 1990. Vol. 72. P. 9–23.
2. Лекции по теории графов / Емеличев В.А [и др.]. // М. Наука, 1990. 384 с.
3. *Wang J.* $K_{1,p}$ -restricted graphs // Adv. Math. 2006. Vol. 35. P. 657–662.
4. *Chilton B.L., Gould R., Polimeni A.D.* A note on graphs whose neighborhoods are n -cycles // Geom. Dedicata. 1974. Vol. 3. P. 199–204.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СТАТИСТИЧЕСКОМУ ПРОГНОЗИРОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

М. К. Журак

1. ПУАССОНОВСКАЯ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

Модели на основе пространственно-временных данных позволяют учитывать зависимость по времени и зависимость по пространству. Данные модели дают возможность адекватно описывать реальные данные во многих приложениях.

Введем следующие обозначения: (Ω, F, P) – вероятностное пространство; $s \in S = \{1, 2, \dots, n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты населенного пункта, n – число населенных пунктов; $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ – дискретное время, T – длительность

временного промежутка; $x_{s,t} \in N_0 = N \cup \{0\}$ – дискретная случайная величина в момент t в точке s ; $U(s) \subseteq S$ – подмножество населенных пунктов, наиболее близко расположенных к s -ому населенному пункту; $F_{\bar{s}, < t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \neq s, \tau < t\} \subset F$ – σ -алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{s,t} \geq 0$ – известный уровень фактора, влияющий на $x_{s,t}$; $\{\varphi_k(t) : 1 \leq k \leq K\}$ – заданный набор базисных функций; $Po(l; \lambda)$ – закон распределения вероятностей Пуассона.

Построим Пуассоновскую условно авторегрессионную модель пространственно-временных наблюдений $\{x_{s,t}\}$, следуя [1]:

$$L\{x_{s,t} | F_{\bar{s}, < t}\} = Po(\cdot; \lambda_{s,t}), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ln \lambda_{s,t} &= \ln \lambda_{s,t}(\{x_{j,t} : j \in U(s)\}, x_{s,t-1}) = \\ &= a_s x_{s,t-1} I\{t > 1\} + \sum_{j \in U(s)} b_{sj} x_{j,t} + \beta_s z_{s,t} + \sum_{k=1}^K \gamma_{sk} \varphi_k(t), t \in N, s \in S, \end{aligned} \quad (2)$$

$$U(s) \subseteq \{1, 2, \dots, s-1\}, s = 2, \dots, n, U(1) \equiv \emptyset, \quad (3)$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \in R^n$, $b_s = (b_{sj_1}, \dots, b_{sj_{|U(s)|}})' \in R^{|U(s)|}$, $j_k \in U(s) : k = 1, \dots, |U(s)|$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)' \in R^n$, $\gamma_s = (\gamma_{s1}, \dots, \gamma_{sK})' \in R^K$, $s \in S$, – параметры модели, $I\{A\}$ – индикаторная функция события A .

Обозначим: $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t})' \in N_0^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления в момент времени t ; $L = \{l_j = (l_{1,j}, \dots, l_{n,j})' \in N_0^n : j = 0, 1, \dots\}$ – упорядоченное множество значений, которые принимает вектор X_t .

Теорема 1. Если имеет место модель (1)–(3), то наблюдаемый векторный временной ряд X_t является неоднородной n -мерной векторной цепью Маркова со счетным пространством состояний L , матрицей вероятностей одношаговых переходов $P(t) = (p_{ij}(t))$:

$$p_{ij}(t) = \prod_{s=1}^n \frac{e^{-\lambda_{s,t}(\{l_{k,j} : k \in U(s)\}, l_{s,i})} \lambda_{s,t}^{l_{s,j}}(\{l_{k,j} : k \in U(s)\}, l_{s,i})}{l_{s,j}!}, \quad i, j \in N_0, t \geq 2,$$

и начальным распределением вероятностей $p = (p_0, p_1, \dots)'$:

$$p_j = \prod_{s=1}^n \frac{e^{-\lambda_{s,1}(\{l_{k,j}: k \in U(s)\})} \lambda_{s,1}^{l_{s,j}}(\{l_{k,j}: k \in U(s)\})}{l_{s,j}!}, \quad j \in N_0.$$

Следствие 1. В условиях теоремы 1, матрица условных вероятностей переходов $H(t_1, t_2) = (h_{ij}(t_1, t_2))$, $h_{ij}(t_1, t_2) = P\{X_{t_2} = l_j | X_{t_1} = l_i\}$, $i, j \in N_0$, за $t_2 - t_1$ шагов от момента времени t_1 до t_2 ($t_1 < t_2, t_1, t_2 \in N$) имеет вид:

$$H(t_1, t_2) = P(t_1 + 1)P(t_1 + 2) \dots P(t_2). \quad (4)$$

Следствие 2. Текущее распределение вероятностей $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)'$, $p_j(t) = P\{X_t = l_j\}$, $j = 0, 1, \dots$ в момент времени t определяется соотношением:

$$p_j(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i h_{ij}(1, t), \quad j \in N_0, t \in N. \quad (5)$$

Примем обозначения: $\theta_s = (a_s, b_s', \beta_s, \gamma_s')' \in R^{2+K+|U(s)|}$,
 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)' \in R^{n(2+K) + \sum_{s=1}^n |U(s)|}$ – составной вектор параметров.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Рассмотрим задачу прогнозирования будущего состояния $X_{T+\tau}$ на $\tau \geq 1$ шагов вперед по наблюдениям $\{X_1, \dots, X_T\}$. Обозначим $\hat{X}_{T+\tau} = g_\tau(X_1, \dots, X_T; \theta)$ прогнозирующую статистику, где θ – вектор истинных значений параметров модели. Будем характеризовать погрешность прогнозирования будущего состояния $X_{T+\tau}$ на $\tau \geq 1$ шагов на основе статистики $\hat{X}_{T+\tau}$ с помощью матричного среднеквадратического риска прогнозирования [2]:

$$r(\tau) = E\{(\hat{X}_{T+\tau} - X_{T+\tau})(\hat{X}_{T+\tau} - X_{T+\tau})'\} \in R^{n \times n}. \quad (6)$$

Для прогнозирующей статистики $\hat{X}_{T+\tau}$ вычислим вначале условный матричный среднеквадратический риск прогнозирования при условии, что задана вся предыстория $\{X_1, \dots, X_T\}$ до момента T включительно:

$$r_c(\tau, X_1, X_2, \dots, X_T) ::= E\{(\hat{X}_{T+\tau} - X_{T+\tau})(\hat{X}_{T+\tau} - X_{T+\tau})' | X_1, X_2, \dots, X_T\}. \quad (7)$$

Так как X_t является цепью Маркова, то зависимость по времени определяется на 1 шаг. Поэтому прогнозирующую статистику будем искать в виде $\hat{X}_{T+\tau} = g_\tau(X_T; \theta)$, а риск (7) будет зависеть только от X_T :

$$r_c(\tau, X_1, X_2, \dots, X_T) = r_c(\tau, X_T) = E\{(\hat{X}_{T+\tau} - X_{T+\tau})(\hat{X}_{T+\tau} - X_{T+\tau})' | X_T\}.$$

Теорема 2. Оптимальный прогноз в смысле минимума среднеквадратичного риска (6) по T предыдущим наблюдениям $\{X_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ для модели (1)–(3) на $\tau \geq 1$ шагов имеет вид:

$$\hat{X}_{T+\tau}^{(1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} l_j h_{ij}(T, T+\tau), \quad (8)$$

где $h_{ij}(T, T+\tau)$ находится из (4), i определяется из условия $l_i = X_T$.

Следствие. Условный среднеквадратический риск для прогнозирующей статистики (8) при условии, что задана вся предыстория до момента T включительно, допускает представление:

$$r_{c1}(\tau, X_T) = \sum_{j_1=0}^{+\infty} \sum_{j_2=0}^{+\infty} l_{j_1} (l_{j_1} - l_{j_2})' h_{ij_1}(T, T+\tau) h_{ij_2}(T, T+\tau),$$

где $h_{ij}(T, T+\tau)$ находится из (4), i определяется из условия $l_i = X_T$.

Так как $L\{x_{s,t} | F_{\bar{s}, < t}\} = Po(\cdot; \lambda_{s,t})$, то $E\{x_{s,t} | F_{\bar{s}, < t}\} = \lambda_{s,t}$. Учитывая это свойство, прогноз на $\tau \geq 1$ шагов будем вычислять итерационно:

$$\hat{x}_{s,T+h}^{(2)} = \exp\{a_s \hat{x}_{j,T+h-1}^{(2)} + \sum_{j \in U(s)} b_{sj} \hat{x}_{j,T+h}^{(2)} + \beta_s z_{s,T+h} + \sum_{k=1}^K \gamma_{sk} \varphi_k(T+h)\},$$

$$h = 1, \dots, \tau, \hat{x}_{s,T}^{(2)} = x_{s,T}, s \in S.$$

Условный среднеквадратический риск для прогноза $\hat{X}_{T+\tau}^{(2)}$ при условии, что задана вся $\{X_1, \dots, X_T\}$, допускает следующее представление:

$$r_{c2}(\tau, X_T) = \sum_{j=0}^{+\infty} (\hat{X}_{T+\tau}^{(2)} - l_j) (\hat{X}_{T+\tau}^{(2)} - l_j)' h_{ij}(T, T+\tau) \succ 0,$$

где $\hat{X}_{T+\tau}^{(2)} = (\hat{x}_{1,T+\tau}^{(2)}, \hat{x}_{2,T+\tau}^{(2)}, \dots, \hat{x}_{n,T+\tau}^{(2)})' \in R^n$, $h_{ij}(T, T+\tau)$ находится из (4), i определяется из условия $l_i = X_T$.

Так как X_t является цепью Маркова, то, как в [2], в качестве показателя погрешности прогноза воспользуемся вероятностью ошибки прогнозирования:

$$r_3(\tau) = P\{\hat{X}_{T+\tau} \neq X_{T+\tau}\}.$$

Теорема 3. Оптимальная по критерию минимума вероятности ошибки $r_3(\tau)$ прогнозирующая статистика для модели (1)–(3) имеет вид:

$$\hat{X}_{T+\tau}^{(3)} = \arg \max_{l_j \in L} h_{ij}(T, T + \tau),$$

где i такое, что $l_i = X_T$. Минимум вероятности ошибки:

$$r_3(\tau) = 1 - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \max_{l_j \in L} h_{ij}(T, T + \tau) p_k h_{ki}(1, T).$$

В случае параметрической априорной неопределенности прогноз будем строить, используя «подстановочный принцип [2]:

$$\tilde{X}_{T+\tau} = g_\tau(X_1, \dots, X_T; \hat{\theta}),$$

где $\hat{\theta}$ – ОМП параметров моделей.

Теорема 4. Условный среднеквадратический риск (7) для подстановочной прогнозирующей статистики $\tilde{X}_{T+\tau}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{r}_c(\tau, X_1, \dots, X_T) = \sum_{j=0}^{+\infty} (\tilde{X}_{T+\tau} - l_j)(\tilde{X}_{T+\tau} - l_j)' h_{ij}(T, T + \tau),$$

где $h_{ij}(T, T + \tau)$ находится из (4), i определяется из условия $l_i = X_T$.

Литература

1. Mariella L., Tarantino M. Spatial temporal conditional Auto-Regressive Model: A New Autoregressive Matrix // Austrian journal of Statistic. 2010. Vol. 3. P. 223–244.
2. Харин, Ю.С. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании. Минск: БГУ, 2008. 263 с.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ХОРОШО К-СОГЛАСОВАННЫХ ГРАФОВ ОБХВАТА НЕ МЕНЕЕ $4K + 4$

Ю. А. Картынник, А. И. Рыжиков

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, задача нахождения наибольшего независимого множества в графе является NP-трудной. Поэтому интерес представляют классы графов, в которых она полиномиально разрешима. Одним из таких классов является введенный в [1] класс хорошо укрытых графов. Граф называется *хорошо укрытым*, если все его максимальные независимые