

$1 \leq q \leq Q^{\gamma_1}$, который не содержит действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

Из теоремы 5 в частности следует, что при $\gamma_1 n = 0.5$ существуют интервалы I длины $|I| = c_7(n)Q^{-3/2}$, которые не содержат алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

Теорема 6. При достаточно большой величине $c_8(n)$ и $Q > Q_0(a, b, n)$ любой интервал $I \subset J$, $|I| = c_8(n)Q^{-3/2}$ содержит не менее, чем $c_9(n)Q^{n+1}|I|$ действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

Теоремы 3 и 5 доказываются без труда за счёт выбора специального расположения интервалов I оценок сверху для результатов. Теоремы 4 и 6 получаются с помощью методов Спринджук [5], Берника [6] и Бересневича [7] метрической теории трансцендентных чисел.

Литература

1. Бударина Н.В., Берник В.И., О'Доннелл Х., Действительные алгебраические числа третьей степени в коротких интервалах. Доклады НАН Беларуси, 54:4 (2012), 23–26.
2. Bernik V., Goetze F., Kukso O., Regular systems of real algebraic numbers of third degree in small intervals. Anal. Probab. methods Number Theory, 2012, pp. 61–69, E. Manstavicius et al. (Eds).
3. Bugeaud Y., Approximation by Algebraic Numbers. Tracts in Mathematics, 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, xvi+274 pp.
4. Schmidt W., T-numbers do exist. Symposia Mathematica, IV (INDAM, Rome, 1968/1969), 1970, 3–26.
5. Спринджук В.Г., Проблема Малера в метрической теории чисел. Наука и техника, Мн., 1967.
6. Берник В.И., О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов. Acta Arith., 53:1 (1989), 1–28.
7. Beresnevich V., On approximation of real numbers by real algebraic numbers. Acta Arith., 90:2 (1999), 97–112.

ДИССОЦИИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В ГРАФАХ

Е.М. Долженко

ВВЕДЕНИЕ

Подмножество вершин графа называется *диссоциирующим*, если степени вершин подграфа, порожденного этим множеством, не превышают единицы. Диссоциирующее множество называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого дис-

социрующего множества. Задачи о наибольшем (соответственно, наименьшем) максимальном диссоциирующем множестве в графе заключаются в нахождении максимального диссоциирующего множества наибольшего (соответственно, наименьшего) размера. Первая задача имеет давнюю историю и изучается уже более 30 лет, в то время как вторая задача относительно недавно (в 2009 г.) была впервые сформулирована в работе [1].

Обе задачи принадлежат классу задач нахождения максимальных (по включению) подграфов с наибольшим (наименьшим) числом вершин и обладающих некоторым предписанным свойством; они находят многочисленные практические применения при проектировании технических устройств и систем, оптимизации коммуникационных сетей, а также при решении задач размещения производственного оборудования [1].

Рассматриваются только конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Используется стандартная теоретико-графовая терминология (см., например, [2] и др.). Если $S \subset V$ – подмножество вершин графа G , то через $N(S)$ обозначается множество вершин из $V \setminus S$ смежных хотя бы с одной вершиной из S , $N[S] = N(S) \cup S$. *Обхватом* графа G называется минимальная длина цикла в графе G . Пусть F – семейство графов. Тогда граф G называется F -свободным, если он не содержит порожденных подграфов изоморфных графам из семейства F .

ЗАДАЧА О НАИБОЛЬШЕМ ДИССОЦИИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ

Пусть $G=(V, E)$ – граф, $D \subset V$ – наибольшее диссоциирующее множество в графе G . Обозначим через $diss^+(G)$ количество вершин в множестве D . Задача, связанная с параметром $diss^+(G)$ (задача о наибольшем диссоциирующем множестве), в виде задачи распознавания свойств формулируется следующим образом. Для заданного графа и натурального числа k требуется ответить на вопрос: верно ли, что $diss^+(G) \geq k$?

Задача о наибольшем диссоциирующем множестве впервые была сформулирована в 1981 М. Яннакакисом в работе [3], в которой установлена ее NP -полнота в классе двудольных графов.

Вычислительная сложность рассматриваемой графовой задачи широко изучается (обзор известных результатов имеется в работе [4]).

В частности, в работе [5], используя технику вспомогательного графа, построен полиномиальный алгоритм, который решает задачу о наибольшем диссоциирующем множестве в классе $(K_{1,n}, P_k)$ -свободных графов, который обозначим через $X_{n,k}$, где $n \geq 3$ и $k \geq 4$ – произвольные фиксированные натуральные числа. Отметим, что в случае, когда $n \leq 2$

или $k \leq 3$, для рассматриваемой задачи, ограниченной классом графов $X_{n,k}$, существует тривиальный полиномиальный алгоритм. Рассмотрим класс $K_{1,n}$ -свободных графов, диаметр каждой компоненты связности которых ограничен некоторой константой r . Этот класс графов обозначим через $Y_{n,r}$.

Пусть $n \geq 3$ и $k \geq 4$ – натуральные числа. Нетрудно видеть, что $X_{n,k} \subset Y_{n,r}$ для любого $r \geq k-1$. Заметим, что для каждого $r \geq k-1$ обратного включения нет. Действительно, существует бесконечная последовательность связных $K_{1,n}$ -свободных графов $\{G_q\}_{q=4}^{\infty}$ с диаметром 3 такая, что каждый граф G_q содержит порожденный подграф изоморфный простой цепи P_q . Граф G_q имеет множество вершин $V(G_q) = \{v_0, v_1, \dots, v_q\} \cup \{u_0, u_1, \dots, u_q\}$ и устроен следующим образом. Множество вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ индуцирует полный граф K_{q+1} , а множество вершин $\{u_0, u_1, \dots, u_q\}$ – простой цикл C_{q+1} . При этом вершина v_i смежна с вершиной u_i для каждого $i = \overline{0, q}$ и вершина u_i смежна с вершиной $v_{(i+1) \bmod (q+1)}$ для каждого $i = \overline{0, q}$. На рис. 1 изображены первые три графа G_4, G_5, G_6 последовательности.

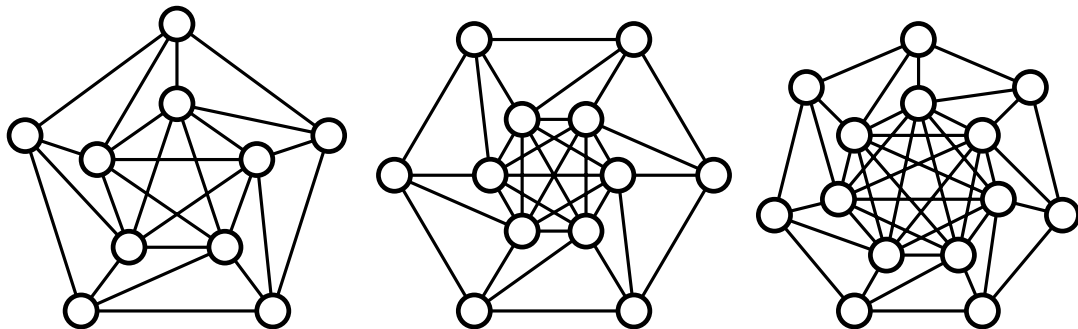


Рис. 1. Примеры графов последовательности G_q : G_4, G_5, G_6

Граф G_q является $K_{1,n}$ -свободным, имеет диаметр 3 и подмножество его вершин $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$ индуцирует простую цепь P_q . Таким образом, класс графов $Y_{n,r}$ ($r \geq 3$) содержит все графы $\{G_q\}_{q=4}^{\infty}$, в то время как $X_{n,k}$ не содержит графы $\{G_q\}_{q=k}^{\infty}$. Как следствие, $X_{n,k}$ является собственным подмножеством $Y_{n,r}$ для любого $r \geq k-1$. Используя технику увеличивающего графа, построен полиномиальный алгоритм, решающий задачу о наибольшем диссоциирующем множестве в классе графов $Y_{n,r}$.

Теорема 1. Задача о наибольшем диссоциирующем множестве полиномиально разрешима в классе $Y_{n,r}$ для любых фиксированных натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \geq 3$.

Поскольку, как ранее было упомянуто, задача о наибольшем диссоциирующем множестве NP -полна, то целесообразно построить быстрые эвристические алгоритмы для нахождения диссоциирующего множества в заданном графе.

Алгоритм А:

Вход: граф $G = (V, E)$

Выход: D – диссоциирующее множество графа G

1. $D \leftarrow \emptyset$;

2. Повторяем пока $|V(G)| > 1$:

Находим в G пару вершин $(u, v) = \arg \min \{ |N(\{u, v\})| : u, v \in V \}$;

$D \leftarrow D \cup \{u, v\}$;

Удаляем из графа G вершины $N[\{u, v\}]$;

3. Если $|V| = 1$, то $D \leftarrow D \cup V(G)$;

4. Построенное множество D возвратим в качестве ответа.

Следующее утверждение дает нижнюю оценку на количество вершин в диссоциирующем множестве D , которое строится посредством алгоритма А.

Теорема 2. *Алгоритм А возвращает диссоциирующее множество D для графа G такое, что*

$$|D| \geq \left\lceil \frac{2n}{4\delta + 5} + \frac{2 - 4n}{n(4\delta + 5)} \right\rceil,$$

где $n = |V(G)|$, $\delta = |E(G)| / |V(G)|$.

ЗАДАЧА О НАИМЕНЬШЕМ МАКСИМАЛЬНОМ ДИССОЦИИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ

Пусть $G=(V,E)$ – граф, $D \subset V$ – наименьшее максимальное диссоциирующее множество в графе G . Обозначим через $diss^-(G)$ количество вершин в множестве D . Задача, связанная с параметром $diss^-(G)$ (задача о наименьшем максимальном диссоциирующем множестве), в виде задачи распознавания свойств формулируется следующим образом. Для заданного графа и натурального числа k требуется ответить на вопрос: верно ли, что $diss^-(G) \leq k$?

Задача о наибольшем диссоциирующем множестве является NP -полной в классе всех графов [1]. Также известно, что задача полиномиально разрешима в классах графов пересечения дуг окружности и АТ-свободных графов [1], и является NP -полной в классе $(K_{1,5}, 2P_5)$ -свободных слабо хордальных графов [4].

Теорема 3. *Задача о наименьшем максимальном диссоциирующем множестве NP-полна в классе планарных графов с обхватом не меньше t , где $t \geq 3$ – произвольное фиксированное натуральное число.*

При доказательстве этой теоремы используется полиномиальное сведение от задачи о наибольшем независимом множестве.

Следствие 1. *Задача о наименьшем максимальном диссоциирующем множестве NP-полна в классе $(C_3, C_4, \dots, C_t)$ -свободных планарных графов, где $t \geq 3$ – произвольное фиксированное натуральное число.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены задачи о наибольшем и наименьшем максимальном диссоциирующих множествах, с помощью различных техник установлена их вычислительная сложность в некоторых классах графов. Для задачи о наибольшем диссоциирующем множестве построен эвристический алгоритм.

Литература

1. Орлович Ю.Л. и др. Сложность задач о диссоциирующих множествах в некоторых наследственных классах графов // Доклады национальной академии наук Беларуси. Сер. 53. 2009. №3. С. 16–20.
2. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов М.: Наука, 1990.
3. Yannakakis M. Node-deletion problems on bipartite graphs // SIAM J. Comput. 1981. №10. С. 310–327.
4. Orlovich Y. et. al. The complexity of dissociation set problems in graphs // Discrete Applied Mathematics. 2011. №. 159. С. 1352–1366.
5. Boliac R., Cameron K., Lozin V. On computing the dissociation number and the induced matching number of bipartite graphs // Ars Combinatoria. 2004. №. 72. С. 241–253.

РЕКУРСИВНОГО ТИПА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. Б. Дорофеев, В. В. Бобков

Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений вида

$$u'(x) = f(x, u(x)), u(t) = y. \quad (1)$$

На отрезке $[x, t]$ приблизим правую часть уравнения из (1) по формуле Тейлора следующим образом:

$$f(x, u(x)) \approx f(t, y) + (x - t)f_x(t, y) + (u(x) - y)f_u(t, y) = \varphi(x, u(x)). \quad (2)$$

Тем самым вместо (1) можно решать начальную задачу