

Теорема 2 [Спанне] Если функция $f: R^n \rightarrow R^n$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \psi(f; t) \frac{dt}{t} < \infty,$$

то выполнено неравенство для модуля непрерывности $\omega(f; \delta)$

$$\omega(f; \delta) < c \int_0^\delta \psi(f; t) \frac{dt}{t}, 0 < \delta < 1.$$

где для любого шара $Q \subset R^n$

$$\psi(f; r) = \sup_{B(x, r) \subset Q} \oint_{B(x, r)} |f - f_{B(x, r)}| d\mu.$$

В нашей работе мы обобщаем теорему 2 в нескольких направлениях, а также получаем в качестве следствия не менее важную теорему 1. Особенно важно, что мы рассматриваем условие теоремы 2 для функции

$$\psi(f; r) = \sup_{B(x, r) \subset Q} \left(\oint_{B(x, r)} |f - f_{B(x, r)}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

при всех $p > 0$.

Литература

1. Campanato C. Proprieta di holderianita di alcune classi di funzioni. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1963. V. 17, \No 1-2. P. 175--188.
2. Meyers N. J. Mean oscillation over cubes and Holder continuity. Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15, \No 5. P. 717--721.
3. Gorka P. Campanato theorem on metric measure spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. 2009. V. 34. P. 523--528.
4. Spanne S. Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes. Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1965. V. 19, \No 4. P. 593--608.

©БГУ

СПЕКТРАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Е.В. ПРОКОННИНА, В.М. ВОЛКОВ

Finite-difference iterative solver for 3D elliptic equations with mixed derivatives is developed. It is shown that Fourier-Jacobi preconditioner provides spectrally optimal property in order to eliminate dependence of the convergence rate of the bi-conjugate gradient iterative method on the discretization step size

Ключевые слова: эллиптические задачи, смешанные производные, итерационные методы

Численные методы решения дифференциальных краевых задач математической физики основаны на построении дискретных моделей в виде систем алгебраических уравнений [1], для решения которых в случае многомерных задач используются преимущественно итерационные методы [1;2;3]. Одна из проблем, возникающих при итерационной реализации таких дискретных моделей, связана с присутствием большинству итерационных методов увеличением числа итераций для достижения заданной точности с ростом спектрального радиуса дискретного оператора при уменьшении шагов дискретизации. В связи с этим представляет интерес разработка асимптотически оптимальных методов, для которых вычислительная сложность растет пропорционально числу искомых неизвестных [4].

Рассмотрена задача Неймана для трехмерного эллиптического уравнения со смешанными производными в приложениях электроимпедансной томографии анизотропных сред. На основе метода фиктивных областей [2] исходная задача в произвольной области сводится к задаче Дирихле в прямоугольном параллелепипеде, что существенно упрощает построение и последующий анализ дискретной модели. Конечно-разностная аппроксимация полученной задачи приводит к системе линейных алгебраических уравнений с разреженной 19-и диагональной матрицей, для решения которой использован метод би-сопряженных градиентов [5].

Рассмотрено пять вариантов аппроксимации смешанных производных [6]. Показано, что все рассмотренные варианты демонстрируют второй порядок точности и обеспечивают одинаковую скорость сходимости итераций в случае гладких коэффициентов задачи. В случае разрывных, существенно неоднородных коэффициентов наблюдается заметная дифференциация дискретных моделей по скорости сходимости итераций. Ухудшение или полная потеря сходимости в данном случае ассоциируется с нарушением свойства положительной определенности тензора проводимости дискретной модели при не вполне адекватном способе аппроксимации смешанных производных.

Для решения проблемы асимптотической оптимальности метода предложено использовать комбинированный переобуславливатель Фурье-Якоби. В этом случае на многочисленных тестовых примерах показано отсутствие роста числа итераций с уменьшением шага сетки дискретной модели. Предложенная техника подтвердила эффективность при решении реальных задач электроимпедансной томографии [6].

Литература

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. — 656 с.
2. Hageman, L. A. Applied iterative methods / L. A. Hageman, D. M. Young. – London: Academic Press, 1981. — 416 p.
3. Олшанский, М. А. Лекции и упражнения по многосеточным методам / М. А. Олшанский. – М.: Физматлит, 2005. – 168 с.
4. Дьяконов, Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов — М., Наука, 1989. – 272 с
5. Barrett, R. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods / R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan et al. – SIAM, Philadelphia, 1994. – 112 p.
6. Turovets, S. A 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT / EEG forward problem. Computational and Mathematical Methods in Medicine / S. Turovets, V. Volkov, A. Zherdetsky, A. Prakonina and A. Malony 2014. – 12 p.

©КИИ

КРОНА ДЕРЕВА КАК ФРАКТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ

Д. В. РЕБКО, А. Н. КАМЛЮК

Crown of the tree was considered as a fractal object in research work. Task of determining the resistance force of tree crown based on probabilistic concepts was posed

Крона дерева, модель, фрактальный объект, сила сопротивления

Задачу о моделировании движения дерева невозможно решить неотрывно от задачи о протекании воздуха сквозь крону дерева. Очевидно, что силы сопротивления, возникающие при этом, и действующие на дерево серьезно влияют на характер его движения. Традиционно считается, что при малых скоростях сила сопротивления линейна по скорости, а при больших – пропорциональна квадрату скорости. Однако при протекании воздуха сквозь крону дерева скорость непрерывно меняется от нуля до некоторой максимальной скорости и непонятно, в какой момент необходимо применять линейную форму для силы сопротивления, а когда квадратичную. Данный факт объясняется тем, что крона дерева представляет собой фрактальный объект (пористую структуру), для которой, нельзя применить отмеченные выше рассуждения о зависимости силы сопротивления от скорости.

Многие природные объекты заполняют пространство не сплошь, а лишь частично. С этой точки зрения такие объекты представляют промежуточную форму между либо объемными (трехмерными) и плоскими (двумерными), либо плоскими и линейными (одномерными) фигурами. Такие объекты получили название фракталов [1]. Для фрактальных объектов «мерность» выражается дробными числами, а не целыми, как для привычных геометрических объектов. Одним из характерных свойств фрактальных объектов является самоподобие, т.е. подобие части объекта в ином масштабе целому объекту.

Особый класс представляют собой ветвящиеся фракталы. К таким объектам можно отнести ветки и кроны деревьев. Подход к изучению крон деревьев как фрактальных объектов применялся в ряде исследований. При этом рассматривалась либо целиком вся крона дерева как объемного тела, [2], либо анализировались отдельные ветки, которые в первом приближении принимались за плоские фигуры [3]. Вычисление фрактальной размерности реально существующих деревьев, основанное на данных наблюдений за деревьями в лесу или на открытой местности, проведено в ограниченном числе работ. Это может быть вызвано как относительной новизной фрактальной теории, так и трудностями методического характера.

Наличие данных о фрактальной размерности позволит определить силу сопротивления, возникающую при протекании воздуха сквозь крону дерева, и учесть это при исследовании динамики деревьев. При протекании воздуха сквозь крону дерева, как через фрактальный объект, скорость потока воздуха изменяется благодаря рассеянию частиц воздуха, а также вследствие потери импульса, затраченного на деформацию веток кроны. Детальное изучение взаимодействия воздушного потока с кроной дерева затруднительно, поэтому в дальнейшем может быть применен вероятностный подход. В результате задачу прохождения воздушного потока можно решить на основе вероятностных представлений, подобно тому как это делается при анализе рассеяния частиц и поглощения излучения [4].

Литература

1. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 261 с.
2. Zeide, B. A method for estimation of fractal dimension of tree crown / B. Zeide, P. Pfeifer // Forestscience. – 1991. –Vol. 37. – P. 1253–1265.