

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами резерфордского обратного рассеяния и просвечивающей электронной микроскопии в сочетании с дифракцией электронов изучены состав и структура покрытий Ti-Zr-Si-N. Просвечивающая электронная микроскопия подтверждает присутствие в слоях нанокристаллической фазы нитридов титана и циркония, диффузионное гало позволяет предположить наличие аморфной фазы Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>. Установлено, что низкая концентрация реактивного газа слабо подавляет процессы коалесценции при формировании покрытия, что приводит к увеличению размера нанокристаллов.

Исследованы основные трибомеханические свойства покрытий. Определено влияние режимов нанесения на структуру и трибомеханические свойства покрытий. Установлено, что наилучшими свойствами обладают покрытия полученные распылением мишени состава Ti – 36, Zr – 56, Si – 8 at.% при стехиометрическом содержании азота в покрытии. Измеренное значение микротвёрдости покрытия превышает микротвёрдость стали в 15 раз а микротвёрдость сплава ВК20 - в 3 раза и достигает 31 ГПа. Покрытие, полученное распылением мишени с избытком циркония в условиях содержания азота, близкого к стехиометрическому, показало уменьшение коэффициента трения по сравнению с парой из полированной нержавеющей стали в 2 раза. Износ подложки из нержавеющей стали с нанесённым на неё покрытием Ti-Zr-Si-N уменьшился на два порядка величины.

#### Литература

1. *Musil J.*, Hard nanocomposite coatings: Thermal stability, oxidation resistance and toughness // *Surface & Coatings Technology* 207, 2012 pp. 50-65
2. *Ivashin O.M., Pogrebnyak A.D., Bratushka S.N.* Nanostructured layers and coatings formed by ion-plasma fluxes in titanium alloys and steels // *Akademperiodika*, Kiev 2011
3. *Комаров Ф.Ф., Пилько В.В., Кукарко В.А., Константинов С.В.* Формирование твёрдых и сверхтвёрдых наноструктурированных трёхкомпонентных покрытий на основе титана методом реактивного магнетронного осаждения // Сборник научных статей Наноструктуры в конденсированных средах, Минск 2013, С. 77-84.
4. *Бурмаков А.П., Комаров Ф.Ф., Пилько В.В., Константинов С.В.* Исследование структуры, элементного состава и свойств нанокристаллических покрытий на основе легированного примесями нитрида титана // 15 Международный симпозиум «Технологии. Оборудование. Качество». Сб. материалов Белорусского промышленного форума-2012, Минск, 15-18 мая 2012, С. 37-38.
5. *Зайков В.А., Бурмаков А.П., Белявский Д.С., Власукова Л.А., Комаров Ф.Ф., Пархоменко И.Н., Пилько В.В.* Спектрофотометрические характеристики наноструктурированных бинарных нитридов TiCRN, TiSiN, TiAlN, полученных методом реактивного магнетронного распыления // *Материалы 10-й Международной научно-технической конференции "Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка"*, 12-14 сентября 2012 г. Минск с. 167-169.
6. *Пилько В.В., Комаров Ф.Ф.* Комплекс приборов для исследования трибологических характеристик нанопокровтий // *Материалы 5-й Международной студенческой научно-технической конференции «Новые направления развития приборостроения»* 18-20 апреля 2012, Минск с.174.

©БГУ

### ТЕОРЕМЫ КАМПАНАТО, МЕЙЕРСА И СПАННЕ ДЛЯ $p > 0$

*А.И. ПОРАБКОВИЧ*

Аннотация. We prove a generalization of classic Spanne's theorem giving the estimation of modulus of continuity of functions using mean oscillations. This generalization is valid for arbitrary metric space with doubling measure

Ключевые слова: Спанне, Кампанато, Мейерс

При изучении свойств регулярности решений эллиптических уравнений с частными производными важную роль играет теорема Кампанато [1], которая дает критерий принадлежности функции классу Гельдера на евклидовом пространстве в терминах поведения ее интегральных средних.

Теорема 1 [Кампанато] Пусть  $\Omega \subset R^n$  – такое множество, что существует постоянная  $\beta > 0$ , для которой выполнено  $\mu(B(y,r) \cap \Omega) \geq \beta r^n$  для всех  $y \in \Omega$ ,  $r > 0$ .

Если  $f \in L^p(Y)$  и существуют такие постоянные  $C$  и  $\sigma \in (n, n+p)$ , что

$$\int_{B(y,r) \cap \Omega} |f(x) - f_{B(y,r)}|^p d\mu \leq Cr^\sigma$$

для всех  $y \in \Omega$ ,  $r > 0$ , то  $f \in H^{(\sigma-n)/p}(Y)$ .

Несколько позже утверждение, подобное теореме 1, независимо установил также Н. Мейерс [2]. Недавно, эта теорема была обобщена на общие метрические пространства с мерой при определенных ограничениях [3]. В нашей работе мы показываем, что эти ограничения являются излишними. Отметим, что в силу неравенства Гельдера условие теоремы 1 тем сильнее, чем больше  $p$ . Поэтому мы существенно ослабляем основное условие теоремы 1, рассматривая его при всех  $p > 0$ . С. Спанне [4], опираясь на результаты Кампанато и Мейерса, получил следующее обобщение предыдущих результатов.

**Теорема 2 [Спанне]** Если функция  $f: R^n \rightarrow R^n$  удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \psi(f; t) \frac{dt}{t} < \infty,$$

то выполнено неравенство для модуля непрерывности  $\omega(f; \delta)$

$$\omega(f; \delta) < c \int_0^\delta \psi(f; t) \frac{dt}{t}, 0 < \delta < 1.$$

где для любого шара  $Q \subset R^n$

$$\psi(f; r) = \sup_{B(x,r) \subset Q} \oint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}| d\mu.$$

В нашей работе мы обобщаем теорему 2 в нескольких направлениях, а также получаем в качестве следствия не менее важную теорему 1. Особенно важно, что мы рассматриваем условие теоремы 2 для функции

$$\psi(f; r) = \sup_{B(x,r) \subset Q} \left( \oint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

при всех  $p > 0$ .

#### Литература

1. Campanato C. Proprieta di holderianita di alcune classi di funzioni. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1963. V. 17, \No 1-2. P. 175--188.
2. Meyers N. J. Mean oscillation over cubes and Holder continuity. Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15, \No 5. P. 717--721.
3. Gorka P. Campanato theorem on metric measure spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. 2009. V. 34. P. 523--528.
4. Spanne S. Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes. Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1965. V. 19, \No 4. P. 593--608.

©БГУ

## СПЕКТРАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Е.В. ПРОКОНИНА, В.М. ВОЛКОВ

Finite-difference iterative solver for 3D elliptic equations with mixed derivatives is developed. It is shown that Fourier-Jacobi preconditioner provides spectrally optimal property in order to eliminate dependence of the convergence rate of the bi-conjugate gradient iterative method on the discretization step size

Ключевые слова: эллиптические задачи, смешанные производные, итерационные методы

Численные методы решения дифференциальных краевых задач математической физики основаны на построении дискретных моделей в виде систем алгебраических уравнений [1], для решения которых в случае многомерных задач используются преимущественно итерационные методы [1;2;3]. Одна из проблем, возникающих при итерационной реализации таких дискретных моделей, связана с присутствием большинству итерационных методов увеличением числа итераций для достижения заданной точности с ростом спектрального радиуса дискретного оператора при уменьшении шагов дискретизации. В связи с этим представляет интерес разработка асимптотически оптимальных методов, для которых вычислительная сложность растет пропорционально числу искомых неизвестных [4].

Рассмотрена задача Неймана для трехмерного эллиптического уравнения со смешанными производными в приложениях электроимпедансной томографии анизотропных сред. На основе метода фиктивных областей [2] исходная задача в произвольной области сводится к задаче Дирихле в прямоугольном параллелепипеде, что существенно упрощает построение и последующий анализ дискретной модели. Конечно-разностная аппроксимация полученной задачи приводит к системе линейных алгебраических уравнений с разреженной 19-и диагональной матрицей, для решения которой использован метод би-сопряженных градиентов [5].

Рассмотрено пять вариантов аппроксимации смешанных производных [6]. Показано, что все рассмотренные варианты демонстрируют второй порядок точности и обеспечивают одинаковую скорость сходимости итераций в случае гладких коэффициентов задачи. В случае разрывных, существенно неоднородных коэффициентов наблюдается заметная дифференциация дискретных моделей по скорости сходимости итераций. Ухудшение или полная потеря сходимости в данном случае ассоциируется с нарушением свойства положительной определенности тензора проводимости дискретной модели при не вполне адекватном способе аппроксимации смешанных производных.