Достаточность условий (6) – (9) установлена. Единственность классических решений (4), (5) обеспечивается однозначностью метода решения.

Необходимость условий (6) – (9) выводится так же, как в [2].

Литература

1. *Барановская С. Н., Юрчук Н. И.* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.
2. *Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* // Вестник БГУ. 2012. Сер.1, № 1. С. 83–86.

ЧИСЛА БЕЛЛА И ИХ СВОЙСТВА

К. А. Спесивцева

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Числом Белла B_n называется число всех неупорядоченных разбиений n-элементного множества на произвольное количество непересекающихся непустых подмножеств, $n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, при этом по определению полагают $B_0 = 1$. (см. [1])

Определение 2. Числом Стирлинга второго рода S_n^k называют число всевозможных разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств, где $n, k \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В связи с этим определением, число Белла можно описать как сумму всех чисел Стирлинга второго рода S_n^k, где $0 \leq k \leq n$. Описывая аналитически, получаем:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_n^k.$$

ТРЕУГОЛЬНИК БЕЛЛА

Числа Белла можно расположить в треугольнике Белла по следующему правилу:

- первая строка содержит 1
- каждая следующая строка начинается числом, стоящим в конце предыдущей строки
- каждое следующее число в строке равно сумме чисел, стоящих слева и сверху от него

Числами Белла будут последние числа в строках.

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ БЕЛЛА

Утверждение 1. [1, 2] Для чисел Белла выполнены следующие свойства:

- $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$,
- $B_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} ((-1)^{k-i} C_k^i i^n)/k!$,
- $B_{n+m} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} S_m^j C_n^k j^{n-k} B_k$,

где $n, k, m \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЕЛ БЕЛЛА

Определение 3. Производящей функцией (производящим рядом) для произвольной (бесконечной) последовательности чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ будем называть выражение вида $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ или, в сокращенной записи, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$.

Определение 4. Экспоненциальной производящей функцией для произвольной (бесконечной) последовательности чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ будем называть выражение вида $\sum_{k=0}^{\infty} ({}^{a_k}/_{k!}) s^k$.

Утверждение 2. Производящая функция для чисел Белла задается формулами:

$$G_B(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-kx)k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^k (x-1/x)_k} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k,$$

под $(x)_k$ будем понимать $(x)_k = x(x-1)(x-2) \ldots (x-k+1)$.

Утверждение 3. Экспоненциальная производящая функция для чисел Белла задается формулой:

$$E_B(x) = \exp(e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Доказательство: Продифференцируем функцию $E_B(x)$. Тогда имеем: $E_B(x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n-1!} x^{n-1} + 0$. Применим утверждение 1:

$$E_B(x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k B_k \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} \frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{(n-k)!}$$

Выполним замену $n - k = l$. В новых обозначениях будем иметь:

$$E_B(x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{l+k}}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k e^x = e^x E_B(x)$$

То есть $E_B(x)' = e^x E_B(x)$. Разрешая полученное дифференциальное уравнение, получаем, что $E_B(x) = e^{[e^x + \text{C}]}$.Для того, чтобы выяснить значение постоянной С подставим $x = 0$.

$1 = e^{[e^0 + \text{C}]} \Rightarrow \text{C} = -1$, тогда $E_B(x) = \exp(e^x - 1)$.

ФОРМУЛА ДОБИНСКОГО И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Теорема 1. [3] Для чисел Белла справедлива формула Добинского:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^n}{m!}.$$

Следствие: формулу Добинского можно видоизменить:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^n! \,(n-m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)},$$

где $n \geq 2$.

Теорема 2. Числа Белла можно вычислить по формуле:

$$B_n = \left[\frac{1}{e} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^n}{k!}\right] + 1,$$

где $n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, под $[x]$ будем понимать целую часть числа x.

ОЦЕНКА РОСТА И АССИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Утверждение 4. Для чисел Белла справедлива оценка для $n \geq 0$:

$$B_n \leq n!.$$

Доказательство:

Установим по индукции $B_n \leq n!$ по индукции. Заметим, что при $n = 0$ $B_0 = 1 \leq 0! = 1$, при $n = 1$ $B_1 = 1 \leq 1! = 1$.

Предположим теперь, что $B_n \leq n!$ верно. Тогда $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k + C_n^n B_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left({n}/{n-k}\right) B_k + B_n \leq$

$\leq n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k B_k + n! \leq n \cdot n! + n! = (n+1)!$. А значит, неравенство $B_n \leq n!$ верно для любых $n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Также можно доказать оценку снизу $\sqrt{n!} \leq B_n$.

Более точные рассуждения позволяют доказать следующие неравенства и описать асимптотическое поведение последовательности чисел Белла (см. [4], [5]).

Теорема 3. Для чисел Белла верно неравенство:

$$B_n < \left(\frac{0.762}{\ln(n+1)}\right)^n.$$

Более того, если $\varepsilon > 0$, то для любого $n > n_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство:

$$B_n < \left(\frac{e^{-0.6+\varepsilon} n}{\ln(n+1)}\right)^n,$$

где $n_0(\varepsilon) = \max\{e^4, d^{-1}(\varepsilon)\}$, $d(x) = \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x)) + \frac{(1+e^{-1})}{\ln(x)}$, $n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 4. Справедлива следующая асимптотическая формула при $n \to \infty$

$$B_n \sim n^{-\frac{1}{2}} [\lambda(n)]^{\frac{n+1}{2}} e^{\lambda(n)-n-1},$$

где $\lambda(n) \ln\big(\lambda(n)\big) = n$.

Литература

1. *Ширяев А. М.* Теория вероятностей. М.: МЦНМО, 2006.
2. *Spivey M.* "A Generalized Recurrence for Bell Numbers" // Journal of Integer Sequences, 2008, №11.
3. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1974.
4. *Berend, D.; Tassa, T.* "Improved bounds on Bell numbers and on moments of sums of random variables" // Probability and Mathematical Statistics, 2010, №30(2): 185–205.
5. Lovász, L. Combinatorial Problems and Exercises, Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 1993.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ В СРЕДНЕМ ИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ТЕЛ

И. А. Тарасюк

Введение. Вследствие наличия способности к направленному характеру прочностных свойств широкое распространение в различных областях техники получили композиционные материалы, совокупность характеристик которых определяется комбинацией его компонент и их свойствами. Проектирование композиционных материалов требует решения комплекса многопараметрических задач по оптимизации структуры материала и выбора исходных компонент, зависящих от эксплуатационного режима и технологических ограничений проекта [1]. Если композиционный материал моделируется однородной линейно упругой