$\emptyset$. Для регулярного элемента y имеем $\dim \pi^{-1}(y) = 4$. Тогда $\dim W_i = 14 + 4 = 18$. Следовательно, $\dim W(-E_4) = 18$. Теорема доказана.

Литература

1. *Беняш-Кривец, В.В.* Многообразия представлений F-групп и их обобщений // Доклады Академии наук Беларуси. 2001. Т. 45. С 9−12.
2. *Rapinchuk, A. S., Benyash-Krivetz V. V., Chernousov V. I.* Representation Varieties of the Fundamental Groups of Compact Orientable Surfaces // Israel J. Math. 1996. Vol. 93. P. 29−71.
3. *Шафаревич, И.Р.* Основы алгебраической геометрии / М., 2007 (МЦНМО).
4. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / М., 1988 (Наука).

ФАКТОРИЗОВАННОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ю. Ф. Новик

В работе решается смешанная задача для неоднородного факторизованного гиперболического уравнения и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования ее единственных классических решений. Эта задача для однородного и неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны решена соответственно в [1] и [2].

Во множестве $G = [0,\infty[\times [0,\infty[$ рассматривается смешанная задача

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),\ a_1 > 0,\ a_2 \geq 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \phi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o} = \psi(x),\ 0 \leq x < \infty, \tag{2}$$

$$\left.\left(\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(t)u\right)\right|_{x=0} = \mu(t),\ \ 0 \leq t < \infty, \tag{3}$$

где $a_i, b_i, i = 1,2,$ − вещественные постоянные. Обозначим множества $A = \{\{x,t\} \in G : x > a_1 t\}, B = \{\{x,t\} \in G : x \leq a_1 t\}$, $C^k(\Omega)$ − множество k- раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Методом характеристик и методом Дюамеля доказана

Теорема. Пусть $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in C^1[0,\infty[$ и $\beta(t) \neq a_1\alpha(t),\ t \in [0,\infty[$. Единственными классическими решениями $u(x,t) \in C^2(G)$ задачи (1)−(3) являются функции

$$u_1(x,t) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} e^{-b_2 t}\,\varphi\,(x + a_2 t) + \frac{a_2}{a_1 + a_2} e^{-b_1 t}\,\varphi\,(x - a_1 t) +$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\mathrm{e}^{\frac{-(a_1b_2+a_2b_1)t}{a_1+a_2}}\int_{x-a_1t}^{x+a_2t}\mathrm{e}^{\frac{b_1-b_2}{a_1+a_2}(s-x)}\left(\psi(s)+\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2}\varphi(s)\right)\mathrm{d}s+$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{(a_1b_2+a_2b_1)(t-\tau)}{a_1+a_2}}\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\frac{b_1-b_2}{a_1+a_2}(s-x)}f(s,\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau,\ \{x,t\}\in A, \quad (4)$$

$$u_2(x,t)=e^{-b_2t}\left[\frac{a_1}{a_1+a_2}\varphi(x+a_2t)+\frac{a_2}{a_1+a_2}\varphi(0)e^{\frac{(b_2-b_1)}{a_1+a_2}(x+a_2t)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_1+a_2}e^{\frac{b_2-b_1}{a_1+a_2}(x+a_2t)}\int_0^{x+a_2t}e^{\frac{b_1-b_2}{a_1+a_2}s}\left(\psi(s)+\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2}\right)\varphi(s)\right)ds\right]+$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t e^{\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2}(\tau-t)}\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}e^{\frac{b_1-b_2}{a_1+a_2}(s-x)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+$$

$$+e^{-b_1t}\int_0^{x-a_1t}\left(\beta\left(-\frac{\tau}{a_1}\right)-a_1\alpha\left(-\frac{\tau}{a_1}\right)\right)^{-1}e^{\int_{x-a_1t}^{\tau}\frac{\gamma\left(-\frac{\eta}{a_1}\right)-b_1\alpha\left(-\frac{\eta}{a_1}\right)}{\beta\left(-\frac{\eta}{a_1}\right)-a_1\alpha\left(-\frac{\eta}{a_1}\right)}d\eta-\frac{b_1\tau}{a_1}}\left(\mu(-\frac{\tau}{a_1})-\right.$$

$$\left.-F(-\frac{\tau}{a_1})\right)d\tau,\qquad \{x,t\}\in B, \quad (5)$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$f\in C(G),\varphi\in C^2[0,\infty[,\psi\in C^1[0,\infty[,\mu\in C^1[0,\infty[, \quad (6)$$

$$\int_0^t e^{b_i\tau}f^{(1,0)}\left(x+(-1)^ia_i(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C(G),\ i=1,2, \quad (7)$$

$$Y_1\equiv\psi(0)\alpha(0)+\varphi(0)\gamma(0)+\beta(0)\varphi'(0)=\mu(0), \quad (8)$$

$$Y_2\equiv f(0{,}0)\alpha(0)-b_1b_2\varphi(0)\alpha(0)-b_1\psi(0)\alpha(0)-b_2\psi(0)\alpha(0)+\psi(0)\gamma(0)+$$

$$+a_2b_1\alpha(0)\varphi'(0)-a_1b_2\alpha(0)\varphi'(0)-a_1\alpha(0)\psi'(0)+a_2\alpha(0)\psi'(0)+$$

$$\beta(0)\psi'(0)+(0)\alpha'(0)+\varphi'(0)\beta'(0)+\varphi(0)\gamma'(0)+a_1a_2\alpha(0)\varphi''(0)=\mu'(0), \quad (9)$$

где одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно первая и вторая производные этих функций и символом $f^{(1,0)}(y,s)$ – первая частная производная от функции $f(y,s)$ по y.

Доказательство. **Достаточность**. Сначала найдем решение исходной смешанной задачи во множестве A. Общее решение однородного уравнения (1) во множестве G имеет вид

$$u_0(x,t) = \mathrm{e}^{-B(x-a_1t)-A(x+a_2t)}(g(x-a_1t)+h(x+a_2t)),\ \forall g,\, h \in C^2, \quad (10)$$

где здесь и далее обозначено $A = b_1/(a_1+a_2)$, $B = -b_2/(a_1+a_2)$. Методом Дюамеля находится частное решение неоднородного уравнения (1) в G

$$u^*(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{(a_1b_2+a_2b_1)(t-\tau)}{a_1+a_2}} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} \mathrm{e}^{\frac{b_1-b_2}{a_1+a_2}(s-x)} f(s,\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau. \quad (11)$$

Для неоднородного уравнения (1) сумма $u(x,t) = u_0(x,t) + u^*(x,t)$ решений (10) и (11) очевидно является общим решением, которое подставляем в начальные условия (2) и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} g(x)+h(x) = \mathrm{e}^{(A+B)x}\varphi(x), \\ (a_1B - a_2A)\mathrm{e}^{-Bx-Ax}\big(g(x)+h(x)\big) + \mathrm{e}^{-Bx-Ax}\big(-a_1g'(x)+a_2h'(x)\big) = \psi(x) \end{cases}$$

относительно функций g, h. Ее решениями являются функции

$$h(y) = \frac{a_1}{a_1+a_2}\mathrm{e}^{(A+B)y}\varphi(y) + \frac{1}{a_1+a_2}\int_0^y \Psi(s)\,\mathrm{d}s + c, \quad (12)$$

$$g(z) = \frac{a_2}{a_1+a_2}\mathrm{e}^{(A+B)z}\varphi(z) - \frac{1}{a_1+a_2}\int_0^z \Psi(s)\,\mathrm{d}s - c, \quad (13)$$

где c – любая вещественная постоянная и

$$\Psi(s) = \mathrm{e}^{(A+B)s}(\psi(s) - (a_1B - a_2A)\varphi(s)).$$

Подставляем выражения (12), (13) в общее решение уравнения (1) и получаем решение (4) смешанной задачи (1)–(3) во множестве A

Теперь найдем решение смешанной задачи (1)–(3) во множестве B. Для упрощения вычислений выведенное выше общее решение неоднородного уравнения (1) можно записать в виде:

$$u(x,t) = e^{-b_1t}g(x-a_1t) + e^{-b_2t}h(x+a_2t) + u^*(x,t),\ \forall g,\, h \in C^2. \quad (14)$$

Подставляем выражение (14) в граничное условие (3), а значение выражения (14) при $x = a_1t$ приравниваем значению решений $u_1(x,t)$ вида (4) при $x = a_1t$ и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} e^{-b_1t}(a_1\alpha(t)-\beta(t))g'(-a_1t) - e^{-b_2t}(a_2\alpha(t)+\beta(t))h'(a_2t) + \\ +e^{-b_1t}(b_1\alpha(t)-\gamma(t))g(-a_1t) + e^{-b_2t}(b_2\alpha(t)-\gamma(t))h(a_2t) = F_1(t), \\ e^{-b_1t}g(0) + e^{-b_2t}h((a_1+a_2)t) = F_2(t), \end{cases} \quad (15)$$

где

$$F_1(t) = \mu(t) - \left\{\left[\alpha(t)(\partial/\partial t) + \beta(t)(\partial/\partial x) + \gamma(t)\right]u^*(x,t)\right\}\Big|_{x=0},\ F_2(t) = u_1(a_1t,t) - u^*(a_1t,t).$$

Система (15) имеет решения

$$h(z)=e^{\frac{b_2 z}{a_1+a_2}}\left(F_2\left(\frac{z}{a_1+a_2}\right)-e^{\frac{-b_1 z}{a_1+a_2}}g(0)\right), \qquad (16)$$

$$g(y)=e^{-\theta(y)}\left(\int_0^y e^{\theta(\tau)-\frac{b_1}{a_1}\tau}\frac{\Phi\left(-\tau/a_1\right)}{a_1\alpha(-\tau/a_1)-\beta(-\tau/a_1)}d\tau+g(0)\right), \qquad (17)$$

где

$$\theta(\tau)=\int_0^\tau \frac{b_1\alpha\left(-\eta/a_1\right)-\gamma\left(-\eta/a_1\right)}{a_1\alpha\left(-\eta/a_1\right)-\beta\left(-\eta/a_1\right)}d\eta,$$

$$\Phi(t)=F_1(t)+e^{-b_2 t}\left(\left(a_2\alpha(t)+\beta(t)\right)h'(a_2 t)-\left(b_2\alpha(t)-\gamma(t)\right)h(a_2 t)\right).$$

Подставляем выражения (16), (17) в общее решение (14) уравнения (1) и получаем решение (5) смешанной задачи (1)–(3) во множестве B.

Нетрудно убедиться в том, что условий гладкости (6), (7) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости функций (4) и (5) в A и B соответственно. Для завершения доказательства достаточности условий гладкости (6), (7) и условий согласования (8), (9) покажем, что предельные значения решений u_1 из множества A и решений u_2 из множества B совпадают на характеристике $x=a_1 t$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Этот факт непосредственно вытекает из условий (8), (9) и следующих равенств:

$$u_2\big|_{x=a_1 t}=u_1\big|_{x=a_1 t}=\frac{1}{a_1+a_2}\left(e^{\frac{a_1(b_2-b_1)t}{a_1+a_2}}\int_0^t e^{\frac{(a_1 b_2+a_2 b_1)(t-\tau)}{a_1+a_2}}\int_{a_1\tau}^{a_1 t+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds d\tau+\right.$$

$$\left.+e^{-b_1 t}\int_0^{(a_1+a_2)t}e^{\frac{(b_1-b_2)s}{a_1+a_2}}\left(\frac{(a_1 b_2+a_2 b_1)\varphi(s)}{a_1+a_2}+\psi(s)\right)ds+e^{-b_1 t}a_2\varphi(0)+e^{-b_2 t}a_1\varphi((a_1+a_2)t)\right),$$

$$\partial u_2/\partial t\big|_{x=a_1 t}-\partial u_1/\partial t\big|_{x=a_1 t}=-e^{-b_1 t}a_1(Y_1-\mu(0))/\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right),$$

$$\partial u_2/\partial x\big|_{x=a_1 t}-\partial u_1/\partial x\big|_{x=a_1 t}=e^{-b_1 t}(Y_1-\mu(0))/\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right),$$

$$\partial^2 u_2/\partial t^2\big|_{x=a_1 t}-\partial^2 u_1/\partial t^2\big|_{x=a_1 t}=a_1 e^{-b_1 t}\Big[\left(-a_1\alpha(0)+\beta(0)\right)\left(Y_2-\mu'(0)\right)-$$

$$-\left(Y_1-\mu(0)\right)\left(b_1\beta(0)-a_1\left(\gamma(0)+\alpha'(0)\right)+\beta'(0)\right)\Big]\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right)^{-2},$$

$$\partial^2 u_2/\partial x^2\big|_{x=a_1 t}-\partial^2 u_1/\partial x^2\big|_{x=a_1 t}=a_1^{-1}e^{-b_1 t}\Big[\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right)\left(Y_2-\mu'(0)\right)-$$

$$-\left(\mu(0)-Y_1\right)\left(-b_1\beta(0)+a_1\left(2b\alpha(0)+\alpha'(0)\right)+\beta'(0)\right)\Big]\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right)^{-2},$$

$$\partial^2 u_2/\partial x\partial t\big|_{x=a_1 t}-\partial^2 u_1/\partial x\partial t\big|_{x=a_1 t}=e^{-b_1 t}\Big[\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right)\left(Y_2-\mu'(0)\right)-$$

$$-\left(\mu(0)-Y_1\right)\left(a_1\left(b_1\alpha(0)-\gamma(0)-\alpha'(0)\right)+\beta'(0)\right)\Big]\left(a_1\alpha(0)-\beta(0)\right)^{-2}.$$

Достаточность условий (6) – (9) установлена. Единственность классических решений (4), (5) обеспечивается однозначностью метода решения.

Необходимость условий (6) – (9) выводится так же, как в [2].

Литература

1. *Барановская С. Н., Юрчук Н. И.* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.
2. *Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* // Вестник БГУ. 2012. Сер.1, № 1. С. 83–86.

ЧИСЛА БЕЛЛА И ИХ СВОЙСТВА

К. А. Спесивцева

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Числом Белла B_n называется число всех неупорядоченных разбиений n-элементного множества на произвольное количество непересекающихся непустых подмножеств, $n \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, при этом по определению полагают $B_0 = 1$. (см. [1])

Определение 2. Числом Стирлинга второго рода S_n^k называют число всевозможных разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств, где $n, k \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В связи с этим определением, число Белла можно описать как сумму всех чисел Стирлинга второго рода S_n^k, где $0 \leq k \leq n$. Описывая аналитически, получаем:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_n^k.$$

ТРЕУГОЛЬНИК БЕЛЛА

Числа Белла можно расположить в треугольнике Белла по следующему правилу:

- первая строка содержит 1
- каждая следующая строка начинается числом, стоящим в конце предыдущей строки
- каждое следующее число в строке равно сумме чисел, стоящих слева и сверху от него

Числами Белла будут последние числа в строках.