щее перемещение и вращение зуба в пространстве, а также плоско-параллельное и корпусное движение.

Литература

1. *Cronau M., Ihlow D., Kubein-Meesenburg D., Fanghänel J., Dathe H., Nägerl H.* Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2006. Vol. 129. P. 599.e13–599.e21.
2. *Tanne K., Nagataki T., Inoue Y., Sakuda M., Burstone C.* Patterns of initial tooth displacement associated with various root lengths and alveolar bone heights // Am. J. Dentofacial Orthop. 1991. Vol. 100. P. 66–71.
3. *Ziegler A., Keilig L., Kawarizadeh A., Jäger A., Bourauel C.* Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth // Eur. J. Orthod.. 2005. Vol. 27. P. 333–339.
4. *Bourauel C., Freudenreich D., Vollmer D., Kobe D., Drescher D., Jaeger A.* Simulation of orthodontic tooth movements // J. Orofac. Orthop. 1999. Vol. 60. P. 136−151.
5. *Nägerl H., Kubein-Meesenburg D.* Discussion: A FEM study for the biomechanical comparison of labial and palatal force application on the upper incisors // Fortschritte der Kieferorthopädie. 1993. Vol. 54. P. 229 – 230.
6. *Dorow C., Sander F. G.* Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method // J. Orofac. Orthop. 2005. Vol. 66. P. 208–218.
7. *Provatidis C. G.* An analytical model for stress analysis of a tooth in translation // Int. J. Eng. Sci. 2001. Vol. 39. P. 1361−1381.
8. *Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J.* Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403 – 410.

О РАЗМЕРНОСТЯХ КОММУТАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В СЛУЧАЕ МАТРИЦ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. Ю. Муранова

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] для описания многообразий представлений некоторых конечно порожденных групп используется тот факт, что многообразие

$V_g(A) = \{(y_1, z_1, \dots, y_g, z_g) \in GL_n(K)^{2g} \mid [y_1, z_1] \dots [y_g, z_g] = A\}$,

где K– алгебраически замкнутое поле характеристики 0, $g \geq 2$, $A \in SL_n(K)$, неприводимо и его размерность равна $(2g-1)n^2 + 1$.

Из статьи [2] следует, что этот результат не может быть обобщен на случай $g = 1$. Многообразие $V_1(A)$ может быть приводимым и $n^2 + 1 \leq \dim V_1(A) \leq n^2 + n$. Следовательно, на этот случай не могут быть обобщены и результаты статьи [1]. Поэтому представляет интерес исследование коммутаторных многообразий

$$W(A) = \{(x, y) \in GL_n(\mathbb{C})^2 | [x, y] = A\}.$$

где $A \in SL_n(\mathbb{C})$. В данной работе найдены размерности коммутаторных многообразий $W(A)$ в случае $n = 2, 3, 4$.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ КОММУТАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ МАТРИЦ ИЗ $SL_2(\mathbb{C})$.

Вычислим размерности многообразий $W(A),\ A \in SL_2(\mathbb{C})$.

Для матрицы $A \in SL_n(\mathbb{C})$ запишем характеристический многочлен в виде

$$\det\,(A - \lambda\, E_n) = \lambda^n + \sigma_1(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \sigma_n(A)$$

и введем многообразие

$T(A) = \{y \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \sigma_i(Ay) - \sigma_i(y) = 0, i = 1, \dots, (n-1)\},\ A \in SL_n(\mathbb{C})$.

Обозначим через π проекцию

$$\pi : W(A) \to T(A), (x, y) \to y.$$

Заметим, что многообразие $W(B)$, где B – жорданова нормальная форма матрицы A, бирегулярно изоморфно $W(A)$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что матрица A жорданова. Так как $n = 2$, матрица A может быть двух видов.

Если $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1\lambda_2 = 1,$ то многообразие $T(A)$ задается многочленом $y_{11} + y_{22} - \lambda_1 y_{11} - \lambda_2 y_{22}$. Этот многочлен тождественно равен нулю только в случае $A = E_2$. Следовательно, $\dim T(E_2) = 4$. В остальных случаях $T(A)$ является гиперповерхностью, задаваемой линейным многочленом, поэтому оно неприводимо и имеет размерность 3.

Если $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1^2 = 1$, то многообразие $T(A)$ задается многочленом $y_{11} + y_{22} - \lambda_1 y_{11} - y_{21} - \lambda_1 y_{22}$. Этот многочлен ненулевой, поэтому, как и выше, $T(A)$ неприводимо и имеет размерность 3.

Пусть $W(A) = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$ – разложение коммутаторного многообразия на неприводимые компоненты. Тогда $\pi(W_i) \subset T(A)$, следовательно, $\dim \overline{\pi(W_i)} \leq \dim T(A)$. Слой $\pi^{-1}(y)$ бирегулярно изоморфен централизатору матрицы y. Поэтому по теореме [4, с. 190] $\dim \pi^{-1}(y) = 2$, если y – регулярная матрица. В [2] доказано, что множество $\pi(W_i)$ содержит регулярную матрицу y_i для любого i, а следовательно содержит открытое подмножество, состоящее из регулярных матриц. Поэтому, по теореме о размерности слоев [3],

$$\dim W(A) = \max_i\{\dim W_i\} \leq \max_i\{\dim \overline{\pi(W_i)} + 2\} \leq \dim T(A) + 2.$$

Применяя теоремы из [2] получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $n = 2$. *Тогда* $dim\, W(E_2) = 6, dim\, W(A) = 5$ *в остальных случаях.*

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ КОММУТАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ МАТРИЦ ИЗ $SL_3(\mathbb{C})$.

Вычислим размерности многообразий $W(A)$, $A \in SL_3(\mathbb{C})$. Как и выше, можно считать, что матрица A жорданова.

Многообразие $T(A)$ для любой матрицы третьего порядка задается двумя многочленами f_1 и f_2, при этом f_1 – линейный многочлен. Для всех матриц, кроме единичной, из равенства $f_1 = 0$ выражается одна из переменных. Следовательно, по теореме о размерности пересечения с гиперповерхностью [3], $\dim T(A) = 7,\ A \neq E_3$. Т. к. $T(E_3) = GL_3(\mathbb{C})$, то $\dim T(E_3) = 9$.

Пусть $W(A) = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ – разложение коммутаторного многообразия на неприводимые компоненты. Как и выше, по теореме о размерности слоев [3], получаем

$$\dim W(A) = \max_i\{\dim W_i\} \leq \max_i\{\dim \overline{\pi(W_i)} + 3\} \leq \dim T(A) + 3.$$

Применяя теоремы из [2] получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $n = 3$. *Тогда* $dim\, W(E_3) = 12,\ dim\, W(A) = 10$ *в остальных случаях.*

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ КОММУТАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ МАТРИЦ ИЗ $SL_4(\mathbb{C})$.

Вычислим размерности многообразий $W(A)$, $A \in SL_4(\mathbb{C})$. Как и выше, можно считать, что матрица A жорданова.

Многообразие $T(A)$ для любой матрицы 4×4 задается тремя многочленами f_1, f_2 и f_3. Для всех жордановых матриц порядка 4 из линейного уравнения $f_1 = 0$ выражается одна из переменных. Подставляя выражение для этой переменной в f_2 и в f_3 , мы получим многочлены g_2 и g_3, которые слишком громоздки, чтобы явно выписать их здесь. Далее мы проверяем, что полученные многочлены неприводимы, не делятся друг на друга и не тождественно равны нулю для всех жордановых матриц кроме $-E_4$ и E_4. Следовательно, для любой жордановой матрицы A, кроме $-E_4$ и E_4, по теореме о размерности пересечения с гиперповерхностью [3], $\dim T(A) = 13$.

Для матрицы $-E_4$ многочлен f_2 тождественно равен нулю, поэтому

$$\dim T(-E_4) = 16 - 1 - 1 = 14,$$

поскольку многочлен f_1 линейный, а многочлен f_3 не делится на f_1.

Заметим, что $T(-E_4)$ неприводимо, т. к. если из f_1 выразить одну координату и подставить в f_3, то получится неприводимый многочлен.

Для матрицы E_4 имеем $T(E_4) = GL_4(\mathbb{C})$, следовательно,

$$\dim T(E_4) = 16.$$

Пусть $W(A) = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ – разложение коммутаторного многообразия на неприводимые компоненты. По теореме о размерности слоев [3],

$$\dim W(A) = \max_i \{\dim W_i\} \leq \max_i\{\dim \overline{\pi(W_i)} + 4\} \leq \dim T(A) + 4.$$

Применяя теоремы из [2] получаем следующий результат, что $\dim W(E_4) = 20$,, если $A \neq E_4, -E_4$. Для $-E_4$ получаем оценку $\dim W(-E_4) \leq 18$.

Теорема 3. *Пусть* $n = 4$. *Тогда* $dim\, W(A) = 17$, *если* $A \neq E_4, -E_4$. *Далее,* $W(E_4)$ *неприводимо и* $dim\, W(E_4) = 20$. *Если* $A = -E_4$, *то* $dim\, W(-E_4) = 18$.

Фактически, в доказательстве нуждается лишь утверждение, что $\dim W(-E_4) = 18$.

Лемма. Существует W_i – неприводимая компонента многообразия $W(-E_4)$, такая что $\overline{\pi(W_i)} = T(-E_4)$.

Доказательство. Пусть T_0 – множество регулярных полупростых элементов в $T(-E_4)$. $T_0 \neq \emptyset$, т. к. в нем лежит, например, матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Известно, что множество регулярных полупростых матриц открыто [2]. Значит, T_0 открыто в $T(-E_4)$. Очевидно, $T_0 \subset \cup_i \pi(W_i)$. Тогда $\overline{T_0} \subset \overline{\cup_i \pi(W_i)} = \cup_i \overline{\pi(W_i)}$ и $\overline{T_0} = T(-E_4)$ т. к. $T(-E_4)$ неприводимо. Таким образом, $T(-E_4) = \cup_i \overline{\pi(W_i)}$. Следовательно, если не существует W_i такой, что $\overline{\pi(W_i)} = T(-E_4)$, то получаем противоречие с тем, что $T(-E_4)$ неприводимо.

Доказательство теоремы.

Рассмотрим проекцию $\pi : W_i \to \pi(W_i), (x, y) \to y$.

Известно [2], что множество регулярных элементов V открыто в $GL_4(\mathbb{C})$, следовательно, оно открыто и в $\overline{\pi(W_i)}$. Множество V не пусто [2]. По теореме о размерности слоев [3] в $\overline{\pi(W_i)}$ существует непустое открытое подмножество U такое, что для любого $y \in U$ имеет место равенство $\dim \pi^{-1}(y) = \dim W_i - \dim \overline{\pi(W_i)}$. Т. к. многообразие $\overline{\pi(W_i)}$ неприводимо, как замыкание образа неприводимого многообразия, то $U \cap V \neq$

$\emptyset$. Для регулярного элемента y имеем $\dim \pi^{-1}(y) = 4$. Тогда $\dim W_i = 14 + 4 = 18$. Следовательно, $\dim W(-E_4) = 18$. Теорема доказана.

Литература

1. *Беняш-Кривец, В.В.* Многообразия представлений F-групп и их обобщений // Доклады Академии наук Беларуси. 2001. Т. 45. С 9−12.
2. *Rapinchuk, A. S., Benyash-Krivetz V. V., Chernousov V. I.* Representation Varieties of the Fundamental Groups of Compact Orientable Surfaces // Israel J. Math. 1996. Vol. 93. P. 29−71.
3. *Шафаревич, И.Р.* Основы алгебраической геометрии / М., 2007 (МЦНМО).
4. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / М., 1988 (Наука).

ФАКТОРИЗОВАННОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ю. Ф. Новик

В работе решается смешанная задача для неоднородного факторизованного гиперболического уравнения и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования ее единственных классических решений. Эта задача для однородного и неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны решена соответственно в [1] и [2].

Во множестве $G = [0,\infty[\times [0,\infty[$ рассматривается смешанная задача

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),\ a_1 > 0,\ a_2 \geq 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o} = \psi(x),\ 0 \leq x < \infty, \tag{2}$$

$$\left.\left(\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(t)u\right)\right|_{x=0} = \mu(t),\ \ 0 \leq t < \infty, \tag{3}$$

где $a_i, b_i, i = 1,2,$ − вещественные постоянные. Обозначим множества $A = \{\{x,t\} \in G : x > a_1 t\}, B = \{\{x,t\} \in G : x \leq a_1 t\}$, $C^k(\Omega)$ − множество k- раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Методом характеристик и методом Дюамеля доказана

Теорема. Пусть $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in C^1[0,\infty[$ и $\beta(t) \neq a_1\alpha(t),\ t \in [0,\infty[$. Единственными классическими решениями $u(x,t) \in C^2(G)$ задачи $(1)-(3)$ являются функции

$$u_1(x,t) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}e^{-b_2 t}\,\varphi\,(x + a_2 t) + \frac{a_2}{a_1 + a_2}e^{-b_1 t}\,\varphi\,(x - a_1 t) +$$