

ный характер кратности m расположен на краю звезды. Поэтому кольцо FG полуцепное, если и только если $m = 1$. Если 3^a – порядок силовой 3-подгруппы, то $m = (3^a - 1)/2$ и 3^a – максимальная степень тройки, делящая $q^n + 1$. Если 9 делит $q^n + 1$, то $a > 1$ и тогда $m \geq 2$. В противном случае, т.е. если 9 не делит $q^n + 1$, то $m = 1$.

3) Случай $p > 3$ разбирается аналогично. Заметим только, что если $p \mid q^n + 1$, то кратность исключительной вершины $m = (p^a - 1)/2$ главного блока всегда больше 1 и, следовательно, кольцо FG не полуцепное. Это завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules. Vol.1. Kluwer. 2004
2. Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian Rings. World Scient. Publ. 2009.
3. Higman D.G. Indecomposable representations at characteristic p // Duke J. Math. 1954. Vol. 21. P. 377–381.
4. Kukharev A., Puninski G. Serial group rings of finite groups. p -solvability // Algebra Discrete Math. 2013, Vol. 16, P. 201–216.
5. Feit W. The Representation Theory of Finite Groups. Amsterdam. North-Holland, 1982.
6. Alperin J.L. Local Representation Theory. Cambridge University Press, 1986.
7. Benson D.J. Representations and Cohomology: Volume 1, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Cambridge University Press, 1998.
8. Burkhard R. Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$ // J. Algebra, 1976, Vol. 40, P. 75–96.

НАЧАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОРНЯ ЗУБА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКЕ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Ф. Мселати

Одним из основных вопросов ортодонтии является профилактика и коррекция неправильного прикуса, а также других зубочелюстных аномалий. При этом важной задачей является прогнозирование начального и долговременного смещения зубов, в первую очередь их начальных перемещений [1]. Начальные перемещения зуба возникают при кратковременном действии нагрузки, после снятия которой, зуб возвращается на прежнее место [2]. При этом дегенеративные и необратимые изменения периодонтальной ткани отсутствуют. Основываясь на высокой упругости тканей периодонтальной связки по сравнению с костями и зубами, большинство авторов указывают на то, что именно периодонт определяет начальные перемещения зуба [3–6]. Целью исследования является ма-

тематическое моделирование начальных перемещений зуба в форме эллиптического гиперboloида в линейно упругом периодонте при действии сосредоточенных сил и моментов сил.

Будем считать, что внешняя поверхность корня зуба и прилегающая к нему внутренняя поверхность периодонтальной связки (считаем, что корень зуба является абсолютно твердым телом) описывается уравнением кругового гиперboloида

$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{\sqrt{1+p^2}-p} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 + p^2} - p \right) = 0, \quad (1)$$

где h – высота корня зуба; a, b – полуоси эллипса в сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня; p – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы, смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба на величину δ (толщина периодонтальной связки постоянна). При действии на зуб сосредоточенной силы $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ точки периодонта, прилегающие к поверхности корня (1) зуба, получают перемещения, равные перемещению корня. Внешняя поверхность периодонтальной связки является жестко закрепленной.

В соответствии с работами [7, 8], будем считать периодонт несжимаемым материалом с коэффициентом Пуассона равным 0,49. Поэтому компоненты тензора деформаций в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к внешней поверхности корня зуба, можно представить в следующем виде [7, 8]:

$$\varepsilon_{nn} = -u_n/\delta, \quad \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \quad \gamma_{n\theta} = -u_\theta/\delta, \quad \gamma_{nt} = -u_t/\delta, \quad \gamma_{t\theta} = 0, \quad (2)$$

где u_n, u_t, u_θ – перемещения точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей к поверхности корня зуба.

Условия равновесия корня зуба (равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб) представим в виде:

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{P} = 0, \quad \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{m}$ – главный момент внешних сил, $\vec{f}$ – главный вектор внешних сил, $\vec{r}$ – радиус-вектор, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности (1), σ – тензор напряжений для упругой линейно изотропной среды.

Выполним преобразование компонент тензора деформаций и вектора перемещения (u_n, u_θ, u_t) точки, находящейся на внешней поверхности

корня зуба (внутренней поверхности периодонтальной связки) из системы координат (n, t, θ) в систему координат (x, y, z) , а также используем следующие линеаризованные формулы

$$u_x = u_{0x} + z\theta_y - y\theta_z, u_y = u_{0y} - z\theta_x + x\theta_z, u_z = u_{0z} + y\theta_x - x\theta_y. \quad (4)$$

После соответствующих преобразований системы (3) с учетом соотношений (2) и (4) получим систему однородных алгебраических уравнений относительно поступательных перемещений и углов поворота корня зуба следующего вида

$$\begin{aligned} c_x u_{0x} + c_{\theta xy} \theta_z &= f_x, c_y u_{0y} = f_y, c_z u_{0z} + c_{\theta yz} \theta_x = f_z, \\ c_{\theta z} u_{0z} + \mu_x \theta_x &= y_f f_z - z_f f_y, \mu_y \theta_y = z_f f_x - x_f f_z, \\ c_{\theta x} u_{0x} + \mu_z \theta_z &= x_f f_y - y_f f_x, \end{aligned} \quad (5)$$

где c_x, c_y, c_z – жесткости периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба вдоль координатных осей; $c_{\theta xy}, c_{\theta yz}$ – статические моменты жесткостей; $c_{\theta x}, c_{\theta z}$ – жесткости периодонта при повороте корня зуба относительно оси $0x, 0z$ при действии силы вдоль этой координатной оси; μ_x, μ_y, μ_z – жесткости периодонта при поворотах корня зуба относительно координатных осей $0x, 0y, 0z$ соответственно; (x_f, y_f, z_f) – координаты точки приложения нагрузки.

В случае отличных от нуля углов поворота, перемещение зуба является винтовым и описывается следующим уравнением:

$$\frac{u_x - y\theta_z + z\theta_y}{\theta_x} = \frac{u_y - z\theta_x + x\theta_z}{\theta_y} = \frac{u_z - x\theta_y + y\theta_x}{\theta_z}, \quad (6)$$

где углы поворота и поступательные перемещения корня зуба определяются решением системы (5) при заданной внешней нагрузке и координатах точки ее приложения.

Уравнение оси винта на основании соотношений (6) можно представить в параметрическом виде (t – параметр):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\theta_z (u_z (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \theta_z (u_x \theta_x + u_y \theta_y))}{\theta_y \theta_z \theta^2} - \frac{\theta^2 t}{\theta_y \theta_z}, y = -\frac{\theta^2 t}{\theta_x \theta_z}, \\ z &= \frac{\theta_x (\theta_x (u_y \theta_y + u_z \theta_z) - u_x (\theta_y^2 + \theta_z^2))}{\theta_y \theta_z \theta^2} - \frac{\theta^2 t}{\theta_x \theta_y}, \theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 1 показаны траектории начальных перемещений пяти точек зуба, ось винтовой линии, определяемая уравнением (7) (рис. 1, а), а также начальные и конечные положения корня зуба (рис. 1, б).

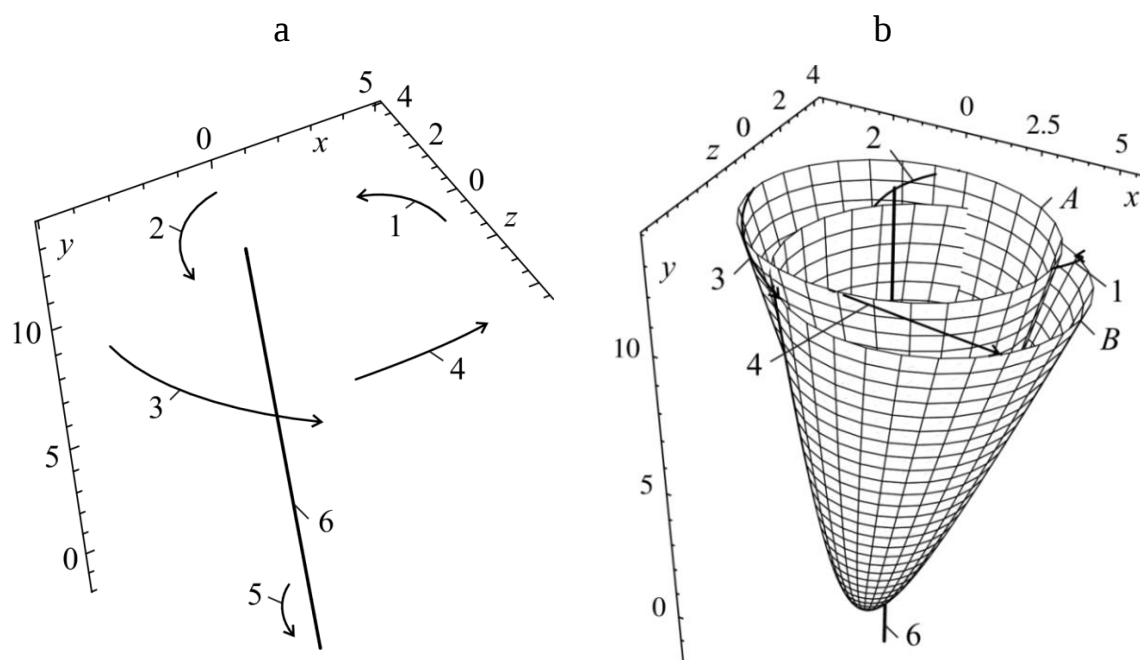


Рис. 1. Начальное (A) и конечное (B) положение корня зуба, ось винтовой линии (6) и траектории начальных перемещения точек зуба с координатами:

1 – $(a, 0, h)$; 2 – $(0, b, h)$; 3 – $(-a, 0, h)$; 4 – $(0, -b, h)$; 5 – $(0, 0, 0)$

На зуб действует сосредоточенная сила с компонентами $f_x = f_z = 1$ Н, $f_y = -1$ Н, приложенная в точке с координатами $(a, 0, h)$. Здесь и далее при вычислениях принимаем высоту корня зуба $h = 13$ мм, большая полуось $b = 3,9$ мм [7, 8], параметр закругления вершины корня $p = 0,4$; упругие свойства периодонтальной связки описываются константами $E = 680$ кПа, $\nu = 0,49$, толщина периодонта $\delta = 0,229$ мм [7, 8]. При визуализации траекторий перемещения точек и положений корня зуба принят коэффициент масштабирования равный 1000. Размеры корня зуба на рис. 1 приведены в мм.

Из рис. 1 видно, что точки зуба при произвольно ориентированной нагрузке получают винтовое перемещение относительно определенной оси. При указанной нагрузке на зуб перемещение вершины корня вдоль оси винтовой линии составляет ≈ 0.92 мкм.

В заключение отметим, что использование оси винтовой линии позволяет прогнозировать и достаточно точно визуализировать начальное перемещение зуба в пространстве относительно его исходного положения при заданной нагрузке. В зависимости от значения перемещения вдоль винтовой оси можно выделить винтовое движение зуба, сочетаю-

щее перемещение и вращение зуба в пространстве, а также плоско-параллельное и корпусное движение.

Литература

1. Cronau M., Ihlow D., Kubein-Meesenburg D., Fanghänel J., Dathe H., Nägerl H. Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2006. Vol. 129. P. 599.e13–599.e21.
2. Tanne K., Nagataki T., Inoue Y., Sakuda M., Burstone C. Patterns of initial tooth displacement associated with various root lengths and alveolar bone heights // Am. J. Dentofacial Orthop. 1991. Vol. 100. P. 66–71.
3. Ziegler A., Keilig L., Kawarizadeh A., Jäger A., Bourauel C. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth // Eur. J. Orthod.. 2005. Vol. 27. P. 333–339.
4. Bourauel C., Freudenreich D., Vollmer D., Kobe D., Drescher D., Jaeger A. Simulation of orthodontic tooth movements // J. Orofac. Orthop. 1999. Vol. 60. P. 136–151.
5. Nägerl H., Kubein-Meesenburg D. Discussion: A FEM study for the biomechanical comparison of labial and palatal force application on the upper incisors // Fortschritte der Kieferorthopädie. 1993. Vol. 54. P. 229 – 230.
6. Dorow C., Sander F. G. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method // J. Orofac. Orthop. 2005. Vol. 66. P. 208–218.
7. Provatidis C. G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation // Int. J. Eng. Sci. 2001. Vol. 39. P. 1361–1381.
8. Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403 – 410.

О РАЗМЕРНОСТЯХ КОММУТАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В СЛУЧАЕ МАТРИЦ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. Ю. Муранова

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] для описания многообразий представлений некоторых конечно порожденных групп используется тот факт, что многообразие

$$V_g(A) = \{(y_1, z_1, \dots, y_g, z_g) \in GL_n(K)^{2g} \mid [y_1, z_1] \dots [y_g, z_g] = A\},$$

где K – алгебраически замкнутое поле характеристики 0, $g \geq 2$, $A \in SL_n(K)$, неприводимо и его размерность равна $(2g - 1)n^2 + 1$.

Из статьи [2] следует, что этот результат не может быть обобщен на случай $g = 1$. Многообразие $V_1(A)$ может быть приводимым и $n^2 + 1 \leq \dim V_1(A) \leq n^2 + n$. Следовательно, на этот случай не могут быть обобщены и результаты статьи [1]. Поэтому представляет интерес исследование коммутаторных многообразий