

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

О. В. Кашников

Смешанная задача для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящей от времени первой косої производной, имеющей характеристические направления в граничном условии, решена в [1], а для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящей от времени косої производной, имеющей не характеристические направления в граничном условии, решена в [2]. В настоящей работе решается смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящей от времени первой косої производной, имеющей характеристические направления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во множестве $G = [0, \infty[\times [0, \infty[$ поставлена смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), a > 0, \{x, t\} \in G, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x < \infty, \quad (2)$$

$$\left(\alpha(t) \frac{\partial u}{\partial t} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(t) u \right) \Big|_{x=0} = \mu(t), 0 \leq t < \infty. \quad (3)$$

Вывести формулу классических решений $u(x, t) \in C^2(G)$ этой задачи.

2. РЕШЕНИЕ

Обозначим $A = \{ \{x, t\} \in G : x > at \}$, $B = \{ \{x, t\} \in G : x \leq at \}$, $C^k(\Omega)$ – множество k -раз непрерывно дифференцируемых функций в Ω .

Теорема. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in C^2[0, \infty[$, $\alpha\alpha'(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) \neq 0$, $t \in [0, \infty[$. Если $f \in C^2(G)$, $\varphi \in C^3[0, \infty[$, $\psi \in C^2[0, \infty[$, $\mu \in C^2[0, \infty[$ и выполняются условия согласования уравнения с начальными и граничными условиями:

$$J_1 \equiv \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (4)$$

$$J_2 \equiv \alpha(0)(a^2\varphi''(0) + f(0, 0)) + (\alpha'(0) + \gamma(0))\psi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
J_3 \equiv & \alpha''(0)\psi(0) + 2\alpha'(0)[f(0,0) + a^2\varphi''(0)] + \alpha(0)[f_t(0,0) + a^2\psi''(0)] + \\
& + \beta''(0)\varphi'(0) + 2\beta'(0)\psi'(0) + \beta(0)[f_x(0,0) + a^2\varphi'''(0)] + \\
& + \gamma''(0)\varphi(0) + 2\gamma'(0)\psi(0) + \gamma(0)[f(0,0) + a^2\varphi''(0)] = \mu''(0),
\end{aligned} \tag{6}$$

то смешанная задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение

$$u_1(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau, \{x,t\} \in A, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) = & \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau + \\
& + \left(a\gamma \left(t - \frac{x}{a} \right) \right)^{-1} \left\{ a\mu \left(t - \frac{x}{a} \right) - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) [a\varphi'(at-x) + \psi(at-x)] - \right. \\
& - a\alpha \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} [f(at-x-\tau,\tau) + f(a\tau-at+x,\tau)] d\tau - \\
& - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} [f(at-x-\tau,\tau) - f(a\tau-at+x,\tau)] d\tau - \\
& \left. - \gamma \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} \int_{a\tau-at+x}^{at-x-\tau} f(s,\tau) ds d\tau \right\}, \{x,t\} \in B.
\end{aligned} \tag{8}$$

2. РЕШЕНИЕ

Единственные решения задачи (1)–(3) в A очевидно даются формулой Даламбера (7). Сначала найдем решения уравнения (1) в B с условиями (2)–(3) при $\varphi = \psi = \mu = 0$. В силу метода характеристик и метода Дюамеля общее решение уравнения (1) имеет вид

$$v(x,t) = g(x+at) + h(x-at) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau, \tag{9}$$

где $\forall g, h \in C^2(B)$. Приравнявая решения (9) и (7) на характеристике $x = at$ и подставляя (9) в условие (3) при $x = 0$ имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} g(2at) + h(0) = 0, \\ a\alpha(t) \left(g'(at) - h'(-at) + \frac{1}{2a} \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) + f(a(\tau-t), \tau)] d\tau \right) + \\ + \beta(t) \left(g'(at) + h'(-at) + \frac{1}{2a} \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) + f(a(\tau-t), \tau)] d\tau \right) + \\ + \gamma(t) \left(g(at) + h(-at) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(a(t-\tau), \tau) ds d\tau \right) = 0. \end{array} \right.$$

Эта система имеет решения

$$\begin{aligned} g(y) &= -h(0), \forall y \geq 0, \\ h(z) &= h(0) - \int_0^z e^{\frac{z}{a}} \frac{a\gamma(-s/a)}{w(s)} ds \left(-w\left(-\frac{\eta}{a}\right) \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{\alpha(-\eta/a)}{2} \int_0^{-\eta/a} [f(-\eta - a\tau, \tau) + f(\eta + a\tau, \tau)] d\tau + \frac{\beta(-\eta/a)}{2a} \int_0^{-\eta/a} [f(-\eta - a\tau, \tau) - \right. \\ &\left. - f(\eta + a\tau, \tau)] d\tau + \frac{\gamma(-\eta/a)}{2a} \int_0^{-\eta/a} \int_{\mu+a\tau}^{-\eta/a-\eta-a\tau} f(s, \tau) ds d\tau \right\} d\eta, \end{aligned}$$

где $w(s) \equiv a\alpha(-s/a) - \beta(-s/a)$. Для того чтобы избавиться от особенности $w^{-1}(-\eta/a)$, в выражении функции h интегрируем по частям 1 раз и имеем

$$\begin{aligned} h(x - at) &= h(0) - \\ &- e^{t-x/a} \int_0^{\eta} \frac{a\gamma(s)}{w(s)} ds (a\gamma(\eta))^{-1} \left\{ a\alpha(\eta) \int_0^{\eta} [f(a(\eta-\tau), \tau) + f(a(\tau-\eta), \tau)] d\tau + \right. \\ &+ \beta(\eta) \int_0^{\eta} [f(a(\eta-\tau), \tau) - f(a(\tau-\eta), \tau)] d\tau + \gamma(\eta) \int_0^{\eta} \int_{a(\tau-\eta)}^{a(\tau+\eta)} f(s, \tau) ds d\tau \left. \right\} \Bigg|_0^{t-x/a} + \\ &+ \int_0^{t-x/a} e^{t-x/a} \frac{a\gamma(s)}{w(s)} ds \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{a\gamma(\eta)} \left\{ a\alpha(\eta) \int_0^{\eta} [f(a(\eta-\tau), \tau) + f(a(\tau-\eta), \tau)] d\tau + \right. \right. \\ &+ \beta(\eta) \int_0^{\eta} [f(a(\eta-\tau), \tau) - f(a(\tau-\eta), \tau)] d\tau + \gamma(\eta) \int_0^{\eta} \int_{a(\tau-\eta)}^{a(\tau+\eta)} f(s, \tau) ds d\tau \left. \right\} \Bigg] d\eta - \\ &- (a\gamma(t-x/a))^{-1} \left\{ a\alpha\left(t - \frac{x}{a}\right) \int_0^{t-x/a} \left[f\left(a\left(t - \frac{x}{a} - \tau\right), \tau\right) + f\left(a\left(\tau - t + \frac{x}{a}\right), \tau\right) \right] d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} \left[f \left(a \left(t - \frac{x}{a} - \tau \right), \tau \right) - f \left(a \left(\tau - t + \frac{x}{a} \right), \tau \right) \right] d\tau \Bigg\} + \\
& + \gamma \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} \int_{a(\tau-t+(x/a))}^{a(t-(x/a)-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.
\end{aligned}$$

В этом выражении отбрасываем два слагаемых, содержащих множитель $\exp \left\{ - \int_{\eta}^{t-x/a} \frac{a\gamma(s)}{w(s)} ds \right\}$, предел которого при $\beta(s) \rightarrow a\alpha(s)$ и $\gamma(s)(a\alpha(s) - \beta(s)) > 0$ в B равен 0, результат подставляем в общее решение (9) и для вспомогательной смешанной задачи получаем решение

$$\begin{aligned}
v(x, t) = & - \left\{ a\alpha(t - x/a) \int_0^{t-x/a} [f(at - x - \tau, \tau) + f(a\tau - at + x, \tau)] d\tau + \right. \\
& + \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} [f(at - x - \tau, \tau) - f(a\tau - at + x, \tau)] d\tau + \gamma \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} \int_{a\tau - at + x}^{at - x - \tau} f(s, \tau) ds d\tau \Bigg\} + \\
& + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.
\end{aligned}$$

Прибавив к решению $v(x, t)$ решение задачи (1)–(3) для случая $f = 0$ из [1], получаем решение (8) задачи (1)–(3) во множестве B .

Непосредственно проверяется, что требований гладкости на f, φ, ψ, μ , указанных в нашей теореме, достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости решений (7) в A и (8) в B . Можно также показать, что условия согласования (4)–(6) обеспечивают непрерывность решений (7), (8) и всех их первых и вторых частных производных на характеристике $x = at$. Единственность этих классических решений задачи (1)–(3) следует из алгоритма ее решения. Теорема доказана.

Литература

1. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения, 2009. Т. 45. № 8, С. 1188–1191.
2. Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2012. № 1. С. 83–86