

**О ПРОБЛЕМЕ УНИПОТЕНТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП,
ВСЕ ПРИМИТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРЫХ УНИПОТЕНТНЫ****А. Н. Адмиралова****1. ВВЕДЕНИЕ**

В. П. Платоновым в статье [5] был поставлен следующий вопрос.

Пусть $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$ – конечно порожденная подгруппа $GL_n(\mathbb{C})$. Предположим, что все примитивные слова от $x_1, x_2, \dots, x_r$ унипотентны. Можно ли в таком случае утверждать, что унипотентна сама группа G , т. е. унипотентными являются все слова от $x_1, x_2, \dots, x_r$?

Напомним, что слово $w(x_1, x_2, \dots, x_r)$ от свободных образующих $x_1, x_2, \dots, x_r$ называется примитивным, если оно может быть включено в базис свободной группы, порожденной $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Для ряда частных случаев на этот вопрос был дан положительный ответ. Например, в самой статье [5] было доказано, что линейная группа с двумя образующими унипотентна, если все примитивные слова в ней состоят из блоков Жордана размерности не более 3. Позже в [2] было показано, что образ $F_2(x, y)$ в $GL_n(\mathbb{C})$ является унипотентной подгруппой при условии отображения примитивных элементов в унипотентные матрицы для $n = 2, 3, 4$. Исследования были продолжены в работе [1], где было установлено аналогичное утверждение для $n = 5, 6, 7$. В случае $n > 7$ вопрос В.П. Платонова на настоящий момент остается открытым.

2. ПОДХОД К ПОИСКУ ПРИМЕРА

Опишем подход к поиску примера неунипотентной линейной группы с двумя образующими x, y , в которой все примитивные слова от x, y являются унипотентными. Отметим, что наиболее сложной представляется проверка унипотентности всех примитивных элементов. В общем случае это представляет достаточно сложную задачу. Для ее решения могут быть полезны линейные представления группы автоморфизмов $Aut(F_2)$ свободной группы ранга 2.

Свободную группу ранга 2 мы можем отождествлять с подгруппой $Inn F_2$ ее внутренних автоморфизмов, ставя в соответствие каждому элементу его действие на свободной группе сопряжением. Известно, что

все примитивные элементы F_2 сопряжены в группе автоморфизмов $Aut(F_2)$ как элементы $Inn F_2$. Поэтому, строя линейные представления F_2 посредством ограничения представлений $Aut(F_2)$, можно гарантировать, что сопряжены будут любые две матрицы, соответствующие примитивным словам. Поэтому достаточно добиться унитарности в случае одного выбранного примитивного слова.

В статье [3] был описан способ построения представлений $Aut(F_2)$ на основании представлений группы B_4 , группы кос на четырех нитях. А именно, доказано, что факторгруппа B_4 по ее центру $Z(B_4)$ изоморфна некоторой подгруппе $Aut(F_2)$ индекса 2. Значит, рассматривая представления B_4 , ядро которых содержит центр $Z(B_4)$, можно индуцировать представления $Aut(F_2)$ в 2 раза большей размерности. Так из представления B_4 , переводящего образующие группы кос $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в матрицы T_1, T_2, T_3 порядка m соответственно, можно получить линейное представление ρ группы $F_2(x, y)$ размерности $2m$. Образы элементов x, y в таком случае имеют следующий вид:

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad (1)$$

где

$$A = T_1 T_3^{-1}, \quad B = T_2 T_1 T_3^{-1} T_2^{-1}. \quad (2)$$

Заметим, что, исходя из блочного вида матриц и попарного равенства блоков, исследование проблемы унитарности для $\rho(F_2(x, y))$ можно свести к исследованию этой проблемы для группы $\langle A, B \rangle$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ B_4 СТЕПЕНИ 24.

Рассмотрим представление B_4 , описанное в статье [4]. Пусть U – векторное пространство размерности 4, а u_1, u_2, u_3, u_4 – его базис. Тогда в пространстве $U^{\otimes 4}$, тензорном произведении четырех копий пространства U , в качестве базиса можно выбрать множество всех тензорных произведений вида

$$\{v_i = u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes u_{i_3} \otimes u_{i_4} \mid i = (i_1, \dots, i_4) \in \{1, 2, 3, 4\}^4\}. \quad (3)$$

Обозначим символом V подпространство $U^{\otimes 4}$ размерности $4!$, натянутое на подмножество векторов (3), таких, что все $i_1, \dots, i_4$ попарно различны. Пользуясь [4], можно построить представление группы кос B_4

как отображение, переводящее $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в автоморфизмы T_1, T_2, T_3 пространства V , действующие на базисные векторы следующим образом:

$$T_k v_j = \begin{cases} v_{s_k j} & j_k < j_{k+1} \\ v_{s_k j} + (v^{-1} - v)v_j & j_k > j_{k+1} \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где v – комплекснозначный параметр, а $s_k i = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k, \dots, i_4)$.

В соответствии с формулами (1), (2) построим сопряженные матрицы A, B размерности 24 и исследуем их свойства. Полученные для $\rho(F_2(x, y))$ результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. 1. *Существуют значения параметра v , при которых $\rho(x)$, $\rho(y)$ – унитарные матрицы. В этом случае жорданова нормальная форма матриц A, B , с точностью до порядка следования клеток Жордана, имеет вид $J = \text{diag}[J_1, J_1, J_1, J_1, J_1, J_1, J_3, J_3, J_3, J_3, J_3, J_3]$, где J_1 – единичная клетка Жордана, J_3 – клетка Жордана порядка 3 с единицами на главной диагонали.*

2. *Если $\rho(x), \rho(y)$ – унитарные матрицы, то группа $\rho(F_2(x, y))$ является унитарной.*

Доказательство. Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$(-1 + \lambda)^{12} (v^2 + \lambda)^6 (1 + v^2 \lambda)^6 = 0,$$

откуда следует, что неединичные собственные значения матриц A, B равны $\lambda = -v^{\pm 2}$. Следовательно, добиться унитарности указанных матриц возможно только при $v = i$ или $v = -i$. В обоих случаях жорданова нормальная форма матриц A, B отыскивается путем стандартных вычислений и имеет вид, указанный в теореме.

Проверим, возможно ли при этом привести матрицы к верхнетреугольному виду. Приведем алгоритм, устанавливающий такую возможность, а в случае положительного ответа – еще и позволяющий отыскать этот вид. Приведем первую его итерацию. Выберем произвольный базис в V и пусть g, h – линейные операторы на V с матрицами A, B в выбранном базисе. Если допустить, что матрицы A, B одновременно приводятся к верхнему треугольному виду, то они имеют общий собственный вектор с собственным значением 1.

Решаем систему линейных уравнений $Af = f$, $Bf = f$. Если решений нет, общих собственных векторов матрицы A, B не имеют и не могут одновременно быть приведены к верхнетреугольному виду. Если решения существуют, выберем максимальный набор линейно независимых

решений $f_1, \dots, f_s$ и дополним его векторами $f_{s+1}, \dots, f_{24}$ до базиса V . В новом базисе операторы g, h будут иметь матрицы $\tilde{A}, \tilde{B}$ соответственно.

Теперь перейдем в фактор-пространство V/W пространства V по подпространству $W = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Поскольку W инвариантно относительно g, h , то операторы g, h корректно действуют на факторпространстве V/W . В базисе $f_{s+1} + W, \dots, f_{24} + W$ операторы g, h имеют матрицы A_1, B_1 , составленных из элементов на пересечении последних $24 - r$ строк и столбцов матриц $\tilde{A}, \tilde{B}$ соответственно.

В пространстве V/W повторяем процедуру поиска общих собственных векторов, но уже для матриц A_1, B_1 .

Если на некотором шаге получены 2 матрицы A_s, B_s , не имеющие общих собственных векторов, делаем вывод, что исходные матрицы путем сопряжения нельзя привести к верхнетреугольному виду.

В нашем случае применение описанной процедуры позволяет за конечное число шагов привести обе матрицы к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали. Это свидетельствует о том, что группа, порожденная ими, является подгруппой верхней унитарной группы и, как подгруппа унитарной группы, унитарна. А значит, унитарна и $\rho(F_2(x, y))$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема говорит нам о том, что рассмотренное представление не дает возможности построить пример неунитарной линейной группы, порожденной двумя элементами, в которой все примитивные элементы являлись бы унитарными.

Литература

1. Тавгенъ О. И., Самсонов Ю. Б. Унитарность образа представления $F_2(x, y)$ матрицами из $GL_n(\mathbb{C})$ при условии отображения образующих и примитивных элементов в унитарные матрицы, $n = 2, 3, 4$. // Докл. НАН Беларуси. Минск, 2001. Т. 45. № 6. С. 29–32.
2. Я. Синьсун Линейные представления свободных групп. Минск: РИВШ, 2011.
3. J.L.Dyer, E.Formanek, E.K.Grossman On the linearity of automorphism groups of free groups. // Arch. Math. 1982. Vol. 38. P. 404–409.
4. B. Leclerc Fock space representations of $U_q(sl_n)$ // Notes from the Summer School held at Inst. Fourier. Grenoble, 2008. 38 p.
5. V.P.Platonov, A.Potapchik. New combinatorial properties of linear groups // Journal of Algebra. 2001. Vol. 235. P. 399–415.