

Различные обобщения квадратурных формул типа Гаусса являются предметом исследования многих авторов. В настоящее время особый интерес представляет построение подобных формул на основании интерполяционных рациональных функций [1].

В данной работе рассмотрены рациональные интерполяционные функции Лагранжа на отрезке  $[-1, 1]$  с узлами в нулях синус-дроби Чебышева-Маркова и одной заранее фиксированной точки  $-1$  или  $1$ . На основании полученных функций Лагранжа построены квадратурные формулы. Отметим, что случай двух фиксированных точек рассмотрен в работе [2].

Пусть  $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$  – произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если  $a_k \in \mathbb{R}$ , то  $|a_k| < 1$ ; 2) если  $a_k \in \mathbb{C}$ , то среди указанных чисел есть такое число  $a_l$ , что  $a_l = \overline{a_k}$ ; 3)  $a_1 = 0$ . Введем следующие обозначения:

$$\mu_n(x) = \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x},$$

при этом

$$\mu'_n(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}.$$

Пусть  $x_k, k=1, \dots, n-1$  – нули синус-дроби Чебышева-Маркова  $N_n(x) = \sin \mu_n(x) / \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-1; 1]$ . Также обозначим  $x_0 = -1, x_n = 1$ .

Рассмотрим интерполяционный рациональный процесс Лагранжа на отрезке  $[-1; 1]$  с узлами в нулях синус-дроби Чебышева-Маркова  $x_k, k=1, \dots, n-1$  и точке  $x_n = 1$ . Для произвольной функции  $f \in C[-1; 1]$  построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа  $L_n^{(1)}(x, f)$ .

Полагая  $f(x) \approx L_n^{(1)}(x, f)$ , получим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \int_{-1}^1 L_n^{(1)}(x, f) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

**Теорема.** Для произвольной функции  $f \in C[-1; 1]$  справедлива следующая квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \pi.$$

Аналогичный результат получен для узлов  $x_k, k=0, \dots, n-1$ .

#### Литература

1. Ровба, Е.А. Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа / Е.А. Ровба // Доклады АН Беларуси. – 1996. – Т.40. – №3. – С. 42-46.
2. Ровба, Е.А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дроби Чебышева - Маркова / Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий // Доклады НАН Беларуси, 2008. – Т.52. №5 – С. 11-15.

©МГПУ

## РАЗРАБОТКА АДАПТИВНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА НА ОСНОВЕ ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТОЛЩИНЫ ПОКРЫТИЙ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

**М.В. ДУБИНА, А.В. МАКАРЕВИЧ, В.В. ШЕПЕЛЕВИЧ**

The optic scheme of a holographic interferometer based on photorefractive crystal  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  of (110) cut is developed. The possibility of using the interferometer to monitor changes in the thickness of transparent and specular objects without applying an external electric field to the crystal is shown

Ключевые слова: фоторефрактивный кристалл, голографический интерферометр

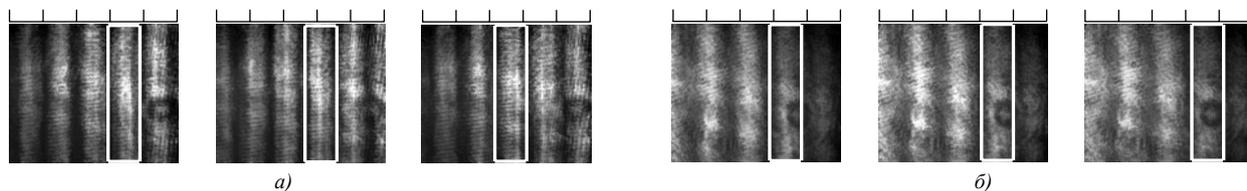
В ряде работ, например [1], была показана возможность применения фоторефрактивных кристаллов силленитов  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (ВТО) среза (110) для интерферометрических исследований объектов с использованием приложенного к кристаллу внешнего электрического поля, которое, хотя и позволяет усилить контраст интерференционной картины, но приводит к перегреву кристалла, появлению дополнительных шумов в интерференционной картине и др.

В связи с этим на основании результатов, полученных ранее в [2, 3], была проведена оптимизация условий записи и считывания голограмм в образце фоторефрактивного кристалла семейства силленитов ВТО среза (110), имеющего толщину 7,7 мм с целью разработки оптической схемы адаптивного

голографического интерферометра, позволяющего проводить интерференционные исследования объектов без приложения к кристаллу внешнего электрического поля.

В основу работы оптимизированного интерферометра положен принцип использования опорной системы интерференционных полос, создаваемых до начала проведения контроля изменения толщины объекта [4, 5]. Результаты предварительной лабораторной апробации оптической схемы интерферометра представлены на *рисунке 1*.

Возможность интерферометра фиксировать изменения толщины прозрачных и зеркальных объектов дает возможность использовать его в прикладных целях – контроле толщины покрытий оптических элементов отраженным или прошедшим зондирующим излучением.



*Рис. 1.* Последовательное смещение опорной системы интерференционных полос: *а)* при изменении толщины прозрачного объекта, *б)* при изменении толщины зеркального объекта в направлении нормали к его отражательной поверхности. Рамкой белого цвета выделена произвольно выбранная светлая интерференционная полоса, смещение которой происходит относительно горизонтальной оси

### Литература

1. *Sochava, S. L.* Holographic interferometry using – 1-order diffraction in photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  and  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  crystals / *S. L. Sochava, R. C. Troth, S. I. Stepanov* // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 1992. – Vol. 9, № 8. – P. 1521-1527.
2. *Шандаров, С. М.* Фоторефрактивные эффекты в электрооптических кристаллах / *С. М. Шандаров, В. М. Шандаров, А. Е. Мандель* и др. – Томск: ТУСУР, 2007. – 242 с.
3. *Шепелевич, В. В.* Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах / *В. В. Шепелевич.* – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.
4. *Макаревич, А. В.* Применение голографического интерферометра на основе фоторефрактивных кристаллов для контроля изменения толщины прозрачных объектов / *А. В. Макаревич, М. В. Дубина, В. В. Шепелевич* и др. // Прикладные проблемы оптики, информатики, радиофизики и физики конденсированного состояния: материалы второй Междунар. науч.-практ. конф., 27-28 фев. 2013 г., Минск. / редкол.: В.И. Попечич (гл. ред.), Ю.И. Дудчик. – Минск: 2013. – С.65-67.
5. *Макаревич, А. В.* Голографический интерферометр на основе фоторефрактивных кристаллов для контроля изменения толщины покрытий оптических элементов / *А. В. Макаревич, М. В. Дубина, В. В. Шепелевич* и др. // IV Конгресс физиков Беларуси (24-26 апреля 2013 г.): Сборник научных трудов./ редкол.: С.Я. Килин (гл. ред) [и др.]. – Минск: Ковчег, 2013. – С. 121-122.

© ГГУ им. Ф.Скорины

## ОГРАНИЧЕННОСТЬ ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПАКТНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

*Р.В. ДЫБА, А.Р. МИРОТИН*

Three criteria boundedness for classical Hankel operators is generalized to compact abelian groups with linearly ordered duals

Ключевые слова: компактная абелева группа, линейно упорядоченная группа, оператор Ганкеля

Пусть  $G$  – компактная абелева группа. Обозначим через  $X$  группу характеров группы  $G$  и будем предполагать, что  $X$  является линейно упорядоченной группой с положительным конусом  $X_+$ . «Крышкой» будем обозначать преобразование Фурье в группе  $G$ .

Рассмотрим пространство  $l^2(X_+) = \{f: X_+ \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{\chi \in X_+} |f(\chi)|^2 < \infty\}$ . Система индикаторов  $\{1_\chi\}_{\chi \in X_+}$  является ортонормированным базисом в  $l^2(X_+)$ .

**Определение.** Оператор  $\Gamma: l^2(X_+) \rightarrow l^2(X_+)$  называется *оператором Ганкеля в  $l^2(X_+)$* , если существует такая функция  $a$  на  $X_+$ , что

$$\langle \Gamma 1_\chi; 1_\xi \rangle = a(\chi\xi) \quad \forall \chi, \xi \in X_+$$

(угловые скобки обозначают скалярное произведение в  $l^2(X_+)$ ).

**Теорема 1.** Оператор Ганкеля  $\Gamma$  ограничен тогда и только тогда, когда  $\exists \psi \in L^\infty(G) \quad \forall \chi \in X_+ \quad \widehat{\psi}(\bar{\chi}) = a(\chi)$ . При этом

$$\|\Gamma\| = \inf \{ \|\psi\|_\infty \mid \widehat{\psi}(\bar{\chi}) = a(\chi) \}.$$