

Можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн

$$M_- e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + M_+ e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \quad R = \left| \frac{M_-}{M_+} \right|^2, \quad R = \left| \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(2a-1)} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-a)} \right|^2. \quad (4.13a)$$

Учтем

$$\begin{aligned} 1-2a &= +2i\sqrt{\varepsilon-1}, & 2a-1 &= -2i\sqrt{\varepsilon+1}, \\ a &= 1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1}, & 1-a &= 1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1}, \end{aligned} \quad (4.13b)$$

тогда

$$R = \left| \frac{\Gamma(+2i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\varepsilon-1})} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1})} \right|^2 \equiv 1. \quad (4.13c)$$

Найдем поведение Y_5 в области больших y . Применяя известное [6] асимптотическое соотношение $Y_5 = \Psi(a, c, y) \sim y^{-a}$, получим

$$\begin{aligned} z \rightarrow +\infty, \quad f_5 &= y^{a+1/2} e^{-y/2} Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim \\ &\sim \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z \right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z\right) \longrightarrow \exp^{-e^{+\infty}} = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, решение f_5 является описанием ожидаемой ситуации: волна падает слева, отражается с вероятностью 1/2 от эффективного барьера; справа за барьером решение резко спадает до нуля. Согласно (3.1c), уравнение

$$\varepsilon - 1 = U(z) \quad \varepsilon - 1 = (k_1^2 + k_2^2) e^{2z_0}$$

определяет критическую точку z_0 , в которой поведение волновой функции должно существенно изменяться. Для точки z_0 получаем явное выражение (приводим его в обычных единицах):

$$z_0 = \rho \ln \frac{\sqrt{2ME\rho^2/\hbar^2 - 1}}{\rho \sqrt{K_1^2 + K_2^2}}. \quad (4.15)$$

Таким образом, глубина проникновения частицы определяется квантовыми числами волнового решения E , K_1 , K_2 и радиусом кривизны ρ пространства Лобачевского. При этом геометрия пространства проявляет себя как эффективная среда со свойствами идеального зеркала.

Литература

1. Шاپиро И.С. // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106. – С. 647.
2. Shapiro, I.S. Expansion of the scattering amplitude in relativistic spherical functions / I.S. Shapiro // Phys. Lett. – 1962. – Vol. 1, № 7. – P. 253–255.
3. Волобуев, И.П. Плоские волны на сфере и некоторые их применения / И.П. Волобуев // ТМФ. – Т. 45, № 3. – С. 421–426.
4. Ovsyuk, E.M. Shapiro's plane waves in spaces of constant curvature and separation of variables in real and complex coordinates / E.M. Ovsyuk, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // NPCS. – 2009. – Vol. 12, № 1. – P. 1–15.
5. Курочкин, Ю.А. Решения уравнения Дирака в пространстве Лобачевского / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 31–35.
6. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрден. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

©ГрГУ имени Я. Купалы

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ НАПЕРЕД ЗАДАННЫЙ УЗЕЛ

Е.В. ДИРВУК, К.А. СМОТРИЦКИЙ

In the main part we describe the construction of the apparatus of approximation – rational interpolating Lagrange functions on segment $[-1;1]$ with nodes sine-fraction Chebyshev-Markov in one fixed plots -1 and 1 in advance. Quadrature formulas are constructed on the basis of the Lagrange's functions

Ключевые слова: рациональные квадратурные формулы, интегрирование на отрезке

Различные обобщения квадратурных формул типа Гаусса являются предметом исследования многих авторов. В настоящее время особый интерес представляет построение подобных формул на основании интерполяционных рациональных функций [1].

В данной работе рассмотрены рациональные интерполяционные функции Лагранжа на отрезке $[-1, 1]$ с узлами в нулях синус-дроби Чебышева-Маркова и одной заранее фиксированной точки -1 или 1 . На основании полученных функций Лагранжа построены квадратурные формулы. Отметим, что случай двух фиксированных точек рассмотрен в работе [2].

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l , что $a_l = \overline{a_k}$; 3) $a_1 = 0$. Введем следующие обозначения:

$$\mu_n(x) = \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x},$$

при этом

$$\mu'_n(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}.$$

Пусть x_k , $k=1, \dots, n-1$ – нули синус-дроби Чебышева-Маркова $N_n(x) = \sin \mu_n(x) / \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1; 1]$. Также обозначим $x_0 = -1$, $x_n = 1$.

Рассмотрим интерполяционный рациональный процесс Лагранжа на отрезке $[-1; 1]$ с узлами в нулях синус-дроби Чебышева-Маркова x_k , $k=1, \dots, n-1$ и точке $x_n = 1$. Для произвольной функции $f \in C[-1; 1]$ построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа $L_n^{(1)}(x, f)$.

Полагая $f(x) \approx L_n^{(1)}(x, f)$, получим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \int_{-1}^1 L_n^{(1)}(x, f) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

Теорема. Для произвольной функции $f \in C[-1; 1]$ справедлива следующая квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \pi.$$

Аналогичный результат получен для узлов x_k , $k=0, \dots, n-1$.

Литература

1. Ровба, Е.А. Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа / Е.А. Ровба // Доклады АН Беларуси. – 1996. – Т.40. – №3. – С. 42-46.
2. Ровба, Е.А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дроби Чебышева - Маркова / Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий // Доклады НАН Беларуси, 2008. – Т.52. №5 – С. 11-15.

©МГПУ

РАЗРАБОТКА АДАПТИВНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА НА ОСНОВЕ ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТОЛЩИНЫ ПОКРЫТИЙ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

М.В. ДУБИНА, А.В. МАКАРЕВИЧ, В.В. ШЕПЕЛЕВИЧ

The optic scheme of a holographic interferometer based on photorefractive crystal $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ of (110) cut is developed. The possibility of using the interferometer to monitor changes in the thickness of transparent and specular objects without applying an external electric field to the crystal is shown

Ключевые слова: фоторефрактивный кристалл, голографический интерферометр

В ряде работ, например [1], была показана возможность применения фоторефрактивных кристаллов силленитов $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ и $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (ВТО) среза (110) для интерферометрических исследований объектов с использованием приложенного к кристаллу внешнего электрического поля, которое, хотя и позволяет усилить контраст интерференционной картины, но приводит к перегреву кристалла, появлению дополнительных шумов в интерференционной картине и др.

В связи с этим на основании результатов, полученных ранее в [2, 3], была проведена оптимизация условий записи и считывания голограмм в образце фоторефрактивного кристалла семейства силленитов ВТО среза (110), имеющего толщину 7,7 мм с целью разработки оптической схемы адаптивного