©МГПУ

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БАРЬЕРА В ТЕОРИИ ШРЕДИНГЕРА С ГЕОМЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

***О.В. ВЕКО*, Е.М. ОВСИЮК**

In the paper a system of exact solutions for Schrödinger equation in the Lobachevsky 3-space is constructed, in a system of quasi-cartezian coordinates closely related to horosherical ones. It is shown the the problem posed in Lobachevsky space simulates a situation in the flat space for a quantum-mechanical particle in a 2-dimensional potential barrier smoothly rising to infinity on the right. Reflection coefficient for all states turns out to be equal +1

Ключевые слова: пространство Лобачевского, уравнение Шредингера, потенциальный барьер

1. Постановка задачи

Известно, что при наличии у пространства–времени кривизны плоских волн в стандартном понимании для полей частиц не существует. Поэтому особый интерес вызывают примеры неевклидовых пространств, где некоторые аналоги таких решений можно построить. В работах Шапиро [1], [2] было показано, что в пространстве Лобачевского есть такие решения для частиц со спином 0. Проблема построения аналога плоских волн в пространстве постоянной положительной кривизны исследовалась Волобуевым [3]. Более поздняя трактовка вопроса о плоских волнах в пространствах постоянной кривизны дана в [4]. Недавно в [5] исследовался вопрос о построении решений уравнений Дирака в пространстве Лобачевского на основе метода квадрирования; при этом, в частности, было указано на возможность построения таким способом решений типа плоских волн из скалярных волн Шапиро. В данной работе обращаемся к случаю уравнения Шредингера в пространстве Лобачевского и строим обобщенную систему решений типа плоских волн для уравнения Шредингера в этом пространстве. Основной акцент сделан на вопросе – какую эффективную квантово-механическую ситуацию в обычном пространстве моделирует эта задача, поставленная и решенная в рамках пространства Лобачевского. Оказалось, что ситуация является точно решаемой задачей о движении частицы на фоне потенциального барьера, плавно растущего до бесконечности.

2. Параметризация пространства Лобачевского квазидекартовыми координатами

В пространстве–времени Лобачевского будем использовать квазидекартовые координаты

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2\,, \qquad x, y, z \in (-\infty, +\infty)\,;$$

элемент объема равен $dV = \sqrt{-g}\; dx\,dy\,dz = e^{-2z}\,dx\,dy\,dz$. Опишем некоторые особенности параметризации пространства координатами (x, y, z). Напомним, что пространство Лобачевского может быть отождествлено с ветвью гиперболоида в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве $u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \rho^2$, $u_0 = +\sqrt{\rho^2 + \mathbf{u}^2}$. Используемые координаты x, y, z связаны с u_a соотношениями

$$u_1 = xe^{-z}\,, \qquad u_2 = ye^{-z}\,,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}[(e^z - e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}]\,, \quad u_0 = \frac{1}{2}[(e^z + e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}]\,. \tag{2.1a}$$

Будем использовать 3-мерную реализацию Пуанкаре пространства Лобачевского как внутренности 3-мерной сферы:

$$q_i = \frac{u_i}{u_0} = \frac{u_i}{\sqrt{\rho^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \qquad q_i q_i < +1\,. \tag{2.1b}$$

Квазидекартовые координаты (x, y, z) связаны с q_i соотношениями:

$$x = \frac{q_1}{1 - q_3}\,, \qquad y = \frac{q_2}{1 - q_3}\,, \qquad e^z = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{1 - q_3}\,. \tag{2.1c}$$

В частности, отмечаем, что на оси $q_1 = 0, q_2 = 0, q \in (-1, +1)$ соотношения $(2.1c)$ дают

$$x = 0\,, \qquad y = 0\,, \qquad e^z = \sqrt{\frac{1 + q_3}{1 - q_3}}\,, \tag{2.2a}$$

$$q_3 \longrightarrow +1\,, \qquad e^z \longrightarrow +\infty\,, \qquad z \longrightarrow +\infty\,;$$

$$q_3 \longrightarrow -1, \qquad e^z \longrightarrow +0, \qquad z \longrightarrow -\infty. \tag{2.2b}$$

3. Разделение переменных в уравнении Шредингера. Решения типа плоских волн

В уравнении Шредингера в римановом пространстве

$$i\hbar\partial_t\Psi = \frac{1}{2M}\left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + eA_k\right)(-g^{kl})(i\hbar\partial_l + eA_l)\right]\Psi \tag{3.1a}$$

в квазидекартовых координатах переменные делятся подстановкой $\Psi = e^{-iEt/\hbar}e^{ik_1x}e^{ik_2y}f(z)$:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{d}{dz} + \varepsilon - e^{2z}(k_1^2 + k_2^2)\right]f(z) = 0, \tag{3.1b}$$

где $\varepsilon = 2ME\rho^2/\hbar^2$. Элементарной подстановкой $f = e^z\varphi(z)$ уравнение (3.1a) приводится к виду уравнения Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - 1 - (k_1^2 + k_2^2)e^{2z}\right)\varphi(z) = 0 \tag{3.1c}$$

с потенциальной функцией $U(z) = 1 + (k_1^2 + k_2^2)e^{2z}$. Ситуация иллюстрируется рисунком 1.

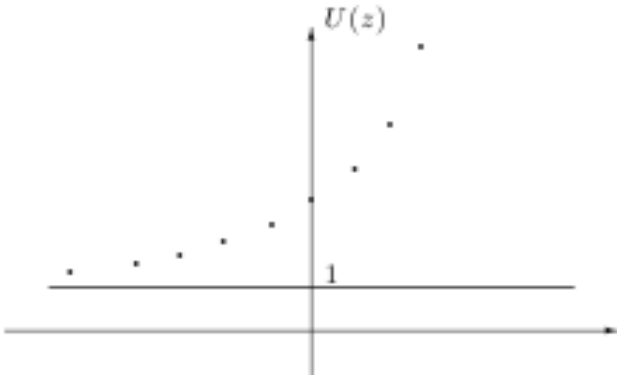

Рис. Эффективная потенциальная кривая

Характерным и легко интерпретируемым физически решением при $\varepsilon > 1$ является следующее: слева имеем суперпозицию волн, падающей слева и отраженной, а справа за барьером волновая функция должна резко спадать до нуля.

Отметим специально, что случай $k_1 = 0,\ k_2 = 0$ является особым; при этом уравнение (3.1b) существенно меняется – в нем исчезает потенциальная функция:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{d}{dz} + \varepsilon\right)f(z) = 0, \quad f = e^{(1\pm i\sqrt{\varepsilon-1}\,z)}, \quad \varphi = e^{(\pm i\sqrt{\varepsilon-1}\,z)}, \tag{3.2}$$

т. е. для функции φ возникают решения типа обычных плоских волн.

4. Анализ общего случая

Обращаемся к общему случаю. Перейдем в (3.1b) к переменной $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,e^z = Z$, $Z \in (0, +\infty)$, уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} - \frac{1}{Z}\frac{d}{dZ} + \frac{\varepsilon}{Z^2} - 1\right)f(Z) = 0; \tag{4.1}$$

выделением множителя $f = \sqrt{Z}\,F$ можно убрать член с первой производной

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{\varepsilon - 3/4}{Z^2} - 1\right)F(Z) = 0. \tag{4.2}$$

Это представление позволяет легко найти асимптотики решений:

$$\underline{(z\to-\infty)\ \ Z\to 0,}\qquad F\sim Z^{1/2\pm i\sqrt{\varepsilon-1}},\qquad f\sim Z^{1\pm i\sqrt{\varepsilon-1}},\qquad \varphi\sim e^{\pm i\sqrt{\varepsilon-1}\,z};$$

$$\underline{(z\to+\infty)\ \ Z\to+\infty,}\quad F\sim e^{\pm Z},\quad f=\sqrt{Z}\,e^{\pm Z},\quad \varphi\sim e^{-z/2}\exp\left[\pm\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,e^{z}\right]. \tag{4.3}$$

Теперь обратимся к построению точных решений уравнения во всей области изменения координаты z. Будем искать решения в виде $f(Z)=Z^A e^{BZ}F(Z)$; уравнение (4.1) дает

$$Z\frac{d^2F}{dZ^2}+(2A-1+2BZ)\frac{dF}{dZ}+\left((B^2-1)Z-B(1-2A)+\frac{A(A-2)+\varepsilon}{Z}\right)F=0. \tag{4.4}$$

При $A,\ B,$ выбранных согласно (дальше для определенности выбираем знак минус перед корнем в выражении для A; предполагаем $\varepsilon>1$)

$$A=1-i\sqrt{\varepsilon-1},\qquad B^2=1, \tag{4.5}$$

уравнение (4.4) упрощается. В полученном уравнении сделаем еще одну замену $Z=y/2$:

$$y\frac{d^2F}{dy^2}+(2A-1+By)\frac{dF}{dy}+B(A-\frac{1}{2})F=0. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) при $B=-1$ представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции (решение уравнения (4.1) можно построить и в функциях Бесселя.)

$$y\frac{d^2Y}{dZ^2}+(c-y)\frac{dY}{dy}-aY=0, \tag{4.7}$$

$$c=2a,\qquad a=A-1/2=1/2-i\sqrt{\varepsilon-1},\qquad f(Z)=y^{a+1/2}e^{-y/2}Y(y). \tag{4.8}$$

Будем использовать две пары линейно независимых решения [6]

$$Y_1=\Phi(a,2a,y),\qquad Y_2=y^{1-2a}\Phi(1-a,2-2a,y),$$

$$Y_5=\Psi(a,2a,y),\qquad Y_7=e^{y}\Psi(a,2a,-y). \tag{4.9}$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера [6]

$$Y_5=\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)}Y_1+\frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)}Y_2,\qquad Y_7=\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)}Y_1-\frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)}Y_2, \tag{4.10a}$$

которые после умножения на $y^{a+1/2}e^{-y/2}$ принимают вид:

$$f_5=\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)}f_1+\frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)}f_2,\qquad f_7=\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)}f_1-\frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)}f_2. \tag{4.10b}$$

Обращаем внимание, что решения Y_1 и Y_2 описывают при отрицательных $z\longrightarrow-\infty$ волны с асимптотическим поведением при $z\to-\infty$ ($y\longrightarrow 0$)

$$f_1=y^{a+1/2}=\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{z}\,e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z},$$

$$\varphi_1=\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}; \tag{4.11a}$$

$$f_2=y^{a+1/2}\,y^{1-2a}=\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{z}\,e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}$$

$$\varphi_2=\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}. \tag{4.11b}$$

Следовательно, функция Y_5 (и связанная с ней φ_5) при отрицательных $z\longrightarrow-\infty$ ведет себя как суперпозиция двух плоских волн согласно

$$\varphi_5=\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)}\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}+\frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)}\left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}}e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}. \tag{4.12}$$

Можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн

$$M_- e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}\,z} + M_+ e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}\,z}, \qquad R = \left|\frac{M_-}{M_+}\right|^2, \qquad R = \left|\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(2a-1)}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-a)}\right|^2. \tag{4.13a}$$

Учтем

$$1-2a = +2i\sqrt{\varepsilon-1}, \qquad 2a-1 = -2i\sqrt{\varepsilon+1},$$
$$a = 1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1}, \qquad 1-a = 1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1}, \tag{4.13b}$$

тогда

$$R = \left|\frac{\Gamma(+2i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\varepsilon-1})}\right|^2 \left|\frac{\Gamma(1/2-i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(1/2+i\sqrt{\varepsilon-1})}\right|^2 \equiv 1. \tag{4.13c}$$

Найдем поведение Y_5 в области больших y. Применяя известное [6] асимптотическое соотношение $Y_5 = \Psi(a,c,y) \sim y^{-a}$, получим

$$z \to +\infty, \qquad f_5 = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim$$
$$\sim \left(2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\; e^z\right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{k_1^2+k_2^2}\; e^z\right) \longrightarrow \exp^{-e^{+\infty}} = 0. \tag{4.14}$$

Таким образом, решение f_5 является описанием ожидаемой ситуации: волна падает слева, отражается с вероятностью $1/2$ от эффективного барьера; справа за барьером решение резко спадает до нуля. Согласно (3.1*c*), уравнение

$$\varepsilon - 1 = U(z) \qquad \varepsilon - 1 = (k_1^2 + k_2^2) e^{2z_0}$$

определяет критическую точку z_0, в которой поведение волновой функции должно существенно изменяться. Для точки z_0 получаем явное выражение (приводим его в обычных единицах):

$$z_0 = \rho \ln \frac{\sqrt{2ME\rho^2/\hbar^2 - 1}}{\rho\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}. \tag{4.15}$$

Таким образом, глубина проникновения частицы определяется квантовыми числами волнового решения E, K_1, K_2 и радиусом кривизны ρ пространства Лобачевского. При этом геометрия пространства проявляет себя как эффективная среда со свойствами идеального зеркала.

Литература

1. *Шапиро И.С.* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106. – С. 647.
2. *Shapiro, I.S.* Expansion of the scattering amplitude in relativistic spherical functions / I.S. Shapiro // Phys. Lett. – 1962. – Vol. 1, № 7. – P. 253–255.
3. *Волобуев, И.П.* Плоские волны на сфере и некоторые их применения / И.П. Волобуев // ТМФ. – Т. 45, № 3. – С. 421–426.
4. *Ovsiyuk, E.M.* Shapiro's plane waves in spaces of constant curvature and separation of variables in real and complex coordinates / E.M. Ovsiyuk, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // NPCS. – 2009. – Vol. 12, № 1. – P. 1–15.
5. *Курочкин, Ю.А.* Решения уравнения Дирака в пространстве Лобачевского / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 31–35.
6. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

©ГрГУ имени Я. Купалы

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ НАПЕРЕД ЗАДАННЫЙ УЗЕЛ

Е.В. ДИРВУК, **К.А. СМОТРИЦКИЙ**

In the main part we describe the construction of the apparatus of approximation – rational interpolating Lagrange functions on segment [-1;1] with nodes sine-fraction Chebyshev-Markov in one fixed plots -1 and 1 in advance. Quadrature formulas are constructed on the basis of the Lagrange's functions

Ключевые слова: рациональные квадратурные формулы, интегрирование на отрезке