

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**Н.М. АДАРЧЕНКО, Л.А. ШЕТЕТКОВ**

In this paper, we describe a characterization of finite supersoluble groups

Ключевые слова: силовская p -подгруппа, разрешимая группа, дисперсивная по Оре подгруппа, холлова подгруппа, максимальная подгруппа

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными. Напомним, что конечная группа называется дисперсивной по Оре, если любой ее гомоморфный образ содержит нормальную силовскую подгруппу, относящуюся к наибольшему простому делителю порядка.

По теореме Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индексы ее максимальных подгрупп – простые числа или квадраты простых чисел. Согласно теореме Б. Хупперта, конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп – простые числа. В данной работе предлагается усиление этих результатов.

Лемма 1. Пусть P – силовская p -подгруппа конечной группы G . Если подгруппа M группы G содержит $N_G(P)$, то число $|G:M|$ сравнимо с 1 по модулю p .

Лемма 2. Пусть P – силовская p -подгруппа конечной группы G . Пусть M – максимальная подгруппа группы G . Если $N_G(P) \leq M$ и $|G:M| = q$ – простое число, то $p < q$.

Лемма 3. Пусть P – силовская p -подгруппа конечной группы G , q – простое число, $p > q$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G . Если $N_G(P) \leq M$ и $|G:M| = q^2$, то $p=3$, $q=2$.

Теорема 1. Пусть для любой не нормальной силовской подгруппы P конечной группы G выполнено следующее условие: если максимальная подгруппа M из G содержит $N_G(P)$, то $|G:M|$ – либо простое число, либо квадрат простого числа. Тогда G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}$ -холлову подгруппу. В частности, группа G разрешима.

Теорема 2. Пусть для любой не нормальной силовской подгруппы P конечной группы выполнено следующее условие: если максимальная подгруппа M из G содержит $N_G(P)$, то $|G:M|$ – простое число. Тогда G сверхразрешима.

Литература

1. Холл, М. Теория групп / Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. – 468 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ПАДЕ**А.В. АСТАФЬЕВА, А.П. СТАРОВОЙТОВ**

We study the asymptotic properties of Hermite-Pade approximants for a system of exponents. The obtained results supplement research of Hermite, Pade, Perron, D. Braess and A.I. Aptekarev dealing with study of the cowergence of Hermite-Pade approximants for systems of exponents

Ключевые слова: совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита

Пусть r - натуральное число, $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ – набор формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа

$n, m_1, m_2, \dots, m_r$ и обозначим $m = \sum_{i=1}^r m_i$, $n_i = m + n - m_i$. Будем считать, что система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$

является совершенной. Тогда существуют такие многочлены $Q_m, P_{n_i}^i$, что $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_{n_i}^i \leq n_i$ и для $i = 1, 2, \dots, r$

$$R_{m,n}^i(z) = Q_m(z)f_i(z) - P_{n_i}^i(z) = c_i z^{n+m+1} + \dots$$

Дроби вида $\pi_i(z) = \frac{P_{n_i}^i}{Q_m}$, $i = 1, 2, \dots, r$ называются аппроксимациями Эрмита-Паде.

Целью работы было нахождение асимптотики аппроксимаций Эрмита-Паде для систем экспонент. Установлены асимптотические равенства аппроксимаций Эрмита-Паде для систем содержащих две экспоненты, при этом учитывались различные зависимости между m и n . Для систем содержащих три экспоненты получены асимптотические равенства для аппроксимаций Эрмита-Паде в диагональном случае. Следующая теорема является основным результатом.

Теорема. Пусть $\{e^z, e^{2z}, e^{3z}\}$ – набор из трех экспонент. Тогда для любого числа z при $n = m_1 = m_2 = m_3$ и $n \rightarrow \infty$

$$e^z - \pi_{3n,3n}^1(z, e^z) = \frac{(-1)^n z^{4n+1}}{(4n)!} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)z} (1 + O(1/n)),$$

$$e^{2z} - \pi_{3n,3n}^2(z, e^{2z}) = \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{2z} \left((-1)^n e^{\frac{\sqrt{5}}{2}z} + \sqrt{\frac{9}{8}} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \right) (1 + O(1/n)),$$

$$e^{3z} - \pi_{3n,3n}^3(z, e^{3z}) = \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{3z} \left((-1)^n e^{\frac{\sqrt{5}}{2}z} + (-1)^n e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}z} + \sqrt{\frac{9}{8}} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \right) (1 + O(1/n)).$$

Литература

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. - М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 256с.

© ГГУ им. Ф.Скорины

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДААННЫМИ СИСТЕМАМИ М-ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУПП

В.А. ВАСИЛЬЕВ, А.Н. СКИБА

A subgroup H of a group G is called modular in G if H is a modular element (in sense of Kurosh) of the lattice $L(G)$ of all subgroups of G . The subgroup of H generated by all modular subgroups of G contained in H is called the modular core of H and denoted by $H_m G$. A subgroup H of a group G is called m -supplemented in G if there exists a subgroup K of G such that $G=HK$ and $H \cap K \leq H_m G$. Based on this concept groups with m -supplemented cyclic subgroups of normal subgroup were studied

Ключевые слова: конечная группа, нормальная подгруппа, модулярное ядро, m -добавляемая подгруппа, циклическая подгруппа

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G , если выполняются следующие условия:

- (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и
- (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [1]) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеристик различных классов групп. Подгруппа, порожденная двумя модулярными подгруппами, сама является модулярной (см. раздел 5.1 [1]). Таким образом, каждая подгруппа H группы G обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой $H_m G$ группы G . Мы называем подгруппу $H_m G$ модулярным ядром подгруппы H . Базируясь на понятии модулярного ядра, в работе [3] нами было введено следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение 3. Подгруппу H группы G назовем m -добавляемой в G , если в G существует такая подгруппа K , что $G=HK$ и $H \cap K \leq H_m G$.

Теорема 1 [4]. Пусть E – нормальная подгруппа группы G , p – простой делитель порядка подгруппы E и $(p-1, |E|)=1$. Если каждая циклическая подгруппа из E порядка p или порядка 4 является m -добавляемой в G , то каждый главный фактор группы G между E и $O_p(E)$ является циклическим.

Теорема 2 [4]. Пусть E – нормальная подгруппа группы G . Если каждая циклическая подгруппа из E нечетного простого порядка является m -добавляемой в G , то каждый главный фактор группы G между E и $O_2(E)$ является циклическим.

Теорема 3 [4]. Пусть E – нормальная подгруппа группы G . Если каждая циклическая подгруппа из E простого порядка или порядка 4 является m -добавляемой в G , то каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим.

Литература

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt; Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.
3. Васильев, В.А. Конечные группы с m -добавляемыми максимальными подгруппами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2011. – №4 (67). – С. 29–37.
4. Васильев, В.А. Об одном обобщении модулярных подгрупп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2011. – Т. 63, №10. – С. 1314–1325.