тогда решения конечно-разностных уравнений (2) сходятся к решению стохастического уравнения (1) равномерно по $t \in [0, T]$ и для почти всех $\omega \in \Omega$.

Заметим, что условие (3) следствия является существенным улучшением аналогичных результатов, полученных в работах [3,4], а именно: более сильное условие $\frac{1}{n} = o\left(h_n^2\right)$ заменено более слабым условием (3).

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. Wong E., Zakai M. // Ann. Math.Statist. 1965. V.36. №5. P.1560.
3. Лазакович Н.В., Стемковская Т.В. Конечно-разностные аппроксимации стохастических дифференциальных уравнений. Проблемы математики и информатики: Тез. докл. Гомель, 1994.
4. Лазакович Н.В. // Весці АН Беларусі. 1996. №2. С.22.

Поступила в редакцию 20.01.97.

УДК 517.9

М.В ДУБАТОВСКАЯ

ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ФАКТОРИЗАЦИИ

Are given sufficient conditions for the representation of a function of real variable with denumerate collection of discontinuous points of analytic character in three terms: singular integral over real line, Φ^+-function and Φ^--function.

При исследовании интегральных уравнений с бесконечным индексом на вещественной оси:

$$(\mathbf{K}^0\varphi)(t) \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)\frac{t+i}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = g(t), t \in L = \mathrm{R},$$

возникает следующая специальная задача факторизации.

Пусть $f(t)$ принадлежит классу $\tilde{\mathrm{H}}$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера на любой конечной части вещественной прямой, ограниченных всюду на $\mathbf{R}$, а функции $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ — контурные значения функций, ограниченных и аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\pm \mathrm{Im}\, z > 0$, имеющие на вещественной прямой счетное множество несовпадающих между собой нулей аналитического типа, т.е.

$$\Psi^+(z) = X^+(z)\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right), \quad \Psi^-(z) = X^-(z)\prod_{j=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{b_j}\right).$$

Проблема состоит в том, чтобы получить представление функции $\frac{f(t)}{\Psi^+(t)\Psi^-(t)}$ в виде $\frac{f(t)}{\Psi^+(t)\Psi^-(t)} = h(t) + \frac{f^+(t)}{\Psi^+(t)} - \frac{f^-(t)}{\Psi^-(t)}$, $t \in \mathrm{R}$, где функции $h(t)$, $f^{\pm}(t)$ из класса $\tilde{\mathrm{H}}$. Кроме того, $f^+(t)$, $f^-(t)$ должны быть аналитически продолжимы соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости, а функция $h(t)$ представима в виде:

$$h(t) = \Omega^+(t) - \Omega^-(t),$$

где $\Omega^{+}(t)$ — предельное значение кусочно-аналитической функции

$$\Omega^{\pm}(z) = \frac{z+i}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in \{\pm \mathrm{Im}\, z > 0\}. \tag{1}$$

Для упрощения формулы ограничимся случаем, когда нули функций $\Psi^{+}(t)$, $\Psi^{-}(t)$ имеются кратности, равные единице.

Исследование этой задачи распадается на два случая:

1) $f(a_k)=f(b_j)=0$ для всех $k,j \in \mathbf{Z}$,

2) хотя бы одно из условий пункта 1) не выполнено.

В первом случае получены следующие достаточные условия разрешимости задачи факторизации:

Теорема 1. *Пусть функции $f(t)$, $\Psi^{+}(t)$, $\Psi^{-}(t)$ таковы, что выполнены следующие ограничения:*

а) функции $\Psi^{+}(z)$, $\Psi^{-}(z)$ аналитические порядка ρ, $0<\rho<1$, непрерывные вплоть до границы,

б) для достаточно больших t, $|t|>t_0$, и $0<h<C_1|t|^{1-\rho}$

$$\left|\Psi^{\pm}(t+h)-\Psi^{\pm}(t)\right| < C_2\left(\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\mu_0}+ht^{\rho-1}\right), 0<\mu_0<1,$$

в)
$$f(0)=0,\quad |f(t)|<C_3|t|^{-\gamma},\quad f(t)\in \mathrm{H}_{\mu_1}, \mu_1>1-\rho,$$
$$|f'(t+h)-f'(t)|<C_4h^{1-\rho}|t|^{1-\rho+\gamma}, 0<h<C_5|t|^{1-\rho},$$
$$|f'(t)|<C_6|t|^{-1+\rho-\gamma}, \gamma>0,\ C_i=\mathrm{const}, i=\overline{1,6}.$$

Тогда задача факторизации имеет решение с $f^{\pm}(z)\equiv 0$ и с функцией $h(t)$, полученной обращением интеграла (1).

Доказательство этого утверждения основано на построениях, предлагаемых в [1, с.180–186].

В случае 2) следует предварительно преобразовать рассматриваемое выражение к виду

$$\frac{f(t)}{\Psi^{+}(t)\Psi^{-}(t)}=\frac{f(t)}{\Psi^{+}(t)\Psi^{-}(t)}-\frac{f^{+}(t)}{\Psi^{+}(t)}+\frac{f^{-}(t)}{\Psi^{-}(t)}+\frac{f^{+}(t)}{\Psi^{+}(t)}-\frac{f^{-}(t)}{\Psi^{-}(t)}=$$
$$=\frac{f_1(t)}{\Psi^{+}(t)\Psi^{-}(t)}+\frac{f^{+}(t)}{\Psi^{+}(t)}-\frac{f^{-}(t)}{\Psi^{-}(t)} \qquad (2)$$

с тем, чтобы свести задачу к рассмотренной выше.

Теорема 2. *Если функции $f(t)$, $\Psi^{+}(t)$, $\Psi^{-}(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то задача факторизации в случае 2) имеет решение с функциями $f^{\pm}(z)$, задаваемыми формулами:*

$$f^{+}(z)=\Psi^{+}(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{f(a_k)\left[\Psi^{-}(a_k)\right]^{-1}}{\Psi^{+\prime}(a_k)(z-a_k)}, \operatorname{Im} z>0,$$
$$f^{-}(z)=-\Psi^{-}(z)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{f(b_j)\left[\Psi^{+}(b_j)\right]^{-1}}{\Psi^{-\prime}(b_j)(z-b_j)}, \operatorname{Im} z<0$$

и функцией $h(t)$, полученной обращением интеграла (1).

Формулы для функций $f^{\pm}(z)$ являются решениями некоторой специальной задачи интерполяции в классе функций, аналитических и ограниченных в полуплоскостях. Свойства этих решений описаны в [2]. Для завершения доказательства остается лишь установить, что функция $f_1(t)$ обладает свойствами в), описанными в теореме 1. При доказательстве этого факта используется техника, предложенная в [1, п.30].

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986.
2. Журавлева М.И. // Математический анализ и его приложения: Сб. Ростов н/Д. 1992. С.71.

Поступила в редакцию 26.02.97.