

$$\left| \int_{-r}^r g(x) \pi_{2N}(x) dx \right| \leq 48r^{\frac{3}{2}} M_g e^{-\sqrt{N}/4}.$$

В процессе доказательства теоремы приходится производить разбиение отрезка $[a_1, b_1]$ с учетом вариации r -ой производной. В этой связи нужна

Лемма 6. Пусть $h(t)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a_1, b_1]$, $[\text{Var } h(t)]_{a_1}^{b_1} \leq 1$. Тогда при любом $\epsilon > 0$ существует разбиение отрезка

$$a_1 = u_1 < u_2 < \dots < u_k < \dots < u_{v+1} = b_1$$

со свойствами

$$|u_{k+1} - u_k| \leq \frac{b_1 - a_1}{m}, \quad (u_{k+1} - u_k)^\epsilon [\text{Var } h(t)]_{u_k}^{u_{k+1}} \leq \frac{(b_1 - a_1)^\epsilon}{m^{1+\epsilon}}, \quad v \leq 2m.$$

Лемма 6 известна, ее доказательство имеется в [6].

Замечание. Сравнение оценки (2) и результатов из [7] показывает, что операторы $V_{4n-2}(x, f)$ с предписанными полосами осуществляют приближение порядка наилучшего рационального приближения в рассматриваемом функциональном классе.

1. Русак В. Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1975. №3. С.39.
2. Он же. // Матем. заметки. 1977. Т.22. №3. С.375.
3. Newman D. J. // Michigan Math. J. 1964. V.11. №1. P.11.
4. Гончар А. А. // Мат. сб. 1969. Т.78. №4. С.640.
5. Petrushev P. P. Popov V. A. Rational approximation of real functions. Cambridge, 1987.
6. Суботин Ю. Н. Черных Н. И. // Мат. заметки. 1970. Т.7. №1. С.31.
7. Попов В. А. // Докл. Болг. АН. 1976. Т.29. №6. С.4.

Поступила в редакцию 03.12.96.

УДК 517.5

А.Н.БОКША

ПРИБЛИЖЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

The exact order for best rational approximation of singular integrals have been obtained. The density of singular integrals have fractional Riemann–Liouville derivative of bounded variation.

В данной работе будем рассматривать сингулярные интегралы:

$$F(x) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где $f(t)$ принадлежит по меньшей мере к $\text{Lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, и исследовать рациональную равномерную аппроксимацию этих функций на отрезке $[-1, 1]$. Интегралы вида (1) встречаются при решении интегральных уравнений профиля крыла.

Предположим, что $f(t)$ аппроксимируется рациональными функциями $r_n(t)$ порядка не выше n , и пусть

$$R_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{r_n(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1]. \quad (2)$$

Непосредственно проверяется, что $R_n(x)$ есть также рациональная функция порядка не выше n .

Скорость аппроксимации сингулярного интеграла $F(x)$ рациональными функциями $R_n(x)$ была изучена В.Н.Русаком [2] для случая, когда плотность $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

Обозначим через $W^rV[-1,1]$ класс функций $f(x)$, представимых в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^x (x-t)^{\alpha-1} h(t) dt,$$

где $r > 0$, $h(t) \in L[-1,1]$ и $V_{-1}^1 h \leq V$.

Другими словами, плотность $f(x)$ имеет производную порядка r , $r > 0$, ограниченной вариации в смысле Римана-Лиувилля.

Теорема 1. Если плотность $f(t) \in W^rV[-1,1]$, то существует такая рациональная функция $r_n(t)$, что

$$\|F(x) - R_n(x)\| \leq \frac{C_1}{n^{r+1}} \ln n, \quad (3)$$

где C_1 не зависит от x и n .

Доказательство. Известно, что для $f(t) \in W^rV[-1,1]$ существует такая рациональная функция $r_n(x)$, что справедлива оценка:

$$\|f(x) - r_n(x)\| \leq \frac{C_2}{n^{r+1}}, \quad x \in [-1,1] \quad (4)$$

(см. [4]). Более того, полюсы этой рациональной функции $r_n(x)$ удалены от отрезка $[1,1]$ на расстояние не меньшее, чем $\frac{C_0}{n^{r+1}}$, $C_0 > 0$, т.е. выполняется неравенство (см. [5])

$$|a_k - x| \geq \frac{C_0}{n^{r+1}}, \quad C_0 > 0,$$

где a_k — полюсы функции $r_n(x)$. При таких ограничениях на полюсы для производной $r'_n(x)$ будет верна оценка

$$|r'_n(x) \sqrt{1-x^2}| \leq C_3 n^{r+2}, \quad (5)$$

которая выводится из неравенств, полученных в [1].

Используя (1), (2) и тот факт, что

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt = -\pi x, \quad (6)$$

мы находим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} |F(x) - R_n(x)| &= \left| \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{r_n(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^1 \frac{f(t) - r_n(t) - f(x) + r_n(x)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt - [f(x) - r_n(x)] \pi x \right| \leq \\ &\leq \pi \|f(x) - r_n(x)\| + \left| \int_{-1}^{x-\delta_n} \right| + \left| \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} \right| + \left| \int_{x+\delta_n}^1 \right|. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определенности будем рассматривать $x \in [0,1]$ в неравенстве (7). Используя (4) и (5), мы будем иметь при $0 < \delta_n \leq \frac{1}{2}$ (выбор δ_n будет уточнен ниже):

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{x-\delta_n} \right| &= \left| \int_{-1}^{x-\delta_n} \frac{f(t) - r_n(t) - f(x) + r_n(x)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt \right| \leq \frac{2C_2}{n^{r+1}} \int_{-1}^{x-\delta_n} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \leq \\ &\leq \frac{2C_2}{n^{r+1}} \int_{-1}^{x-\delta_n} \frac{dt}{t-x} = \frac{2C_2}{n^{r+1}} [-\ln \delta_n + \ln(1+x)] \leq \frac{4C_2}{n^{r+1}} \ln \frac{1}{\delta_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $[x+\delta_n, 1] \neq \emptyset$, то находим подобным образом, что

$$\left| \int_{x+\delta_n}^1 \frac{1}{t-x} dt \right| \leq \frac{2C_2}{n^{r+1}} \int_{x+\delta_n}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \leq \frac{2C_2}{n^{r+1}} \int_{x+\delta_n}^1 \frac{dt}{t-x} = \frac{2C_2}{n^{r+1}} [\ln(1-x) - \ln \delta_n] \leq \frac{2C_2}{n^{r+1}} \ln \frac{1}{\delta_n}. \quad (9)$$

Заметим, что:

$$\left| \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt \right| + \left| \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt \right| = I_1 + I_2. \quad (10)$$

Прежде чем оценивать интеграл I_1 , покажем, что если $f(x) \in W^r V[-1, 1]$, то $f(x) \in \text{Lip}_M r$, если $0 < r < 1$, и $f(x) \in \text{Lip}_M 1$, если $r \geq 1$.

Действительно:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x_1} (x_1 - t)^{r-1} h(t) dt - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x_2} (x_2 - t)^{r-1} h(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \left| \int_{-1}^{x_1} [(x_1 - t)^{r-1} - (x_2 - t)^{r-1}] h(t) dt \right| + \frac{1}{\Gamma(r)} \left| \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{r-1} h(t) dt \right| = i_1 + i_2. \end{aligned} \quad (11)$$

При получении (11) предполагалось, что $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{\Gamma(r)} \left| \int_{-1}^{x_1} [(x_1 - t)^{r-1} - (x_2 - t)^{r-1}] h(t) dt \right| \leq \frac{V}{r\Gamma(r)} \left| -(x_1 - t)^r + (x_2 - t)^r \right|_{-1}^{x_1} = \\ &= \frac{V}{r\Gamma(r)} \left\{ |(x_1 + 1)^r - (x_2 + 1)^r| + |x_2 - x_1|^r \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для второго интеграла в (11) будем иметь

$$i_2 = \frac{1}{\Gamma(r)} \left| \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{r-1} h(t) dt \right| \leq \frac{V}{\Gamma(r)} \left| \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{r-1} dt \right| = \frac{V}{r\Gamma(r)} |x_2 - x_1|^r. \quad (13)$$

Итак, из оценок (11)–(13) непосредственно видно, что $f(x) \in \text{Lip}_M r$, где $0 < r < 1$ и $f(x) \in \text{Lip}_M 1$, если $r \geq 1$. Тогда для первого интеграла из (10) найдем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} \left| \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \right| \sqrt{1-t^2} dt \leq M \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} |t-x|^{\alpha-1} \sqrt{1-t^2} dt \leq M \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} |t-x|^{\alpha-1} dt = \\ &= 2M \int_x^{x+\delta_n} (t-x)^{\alpha-1} dt = 2M \frac{(t-x)^\alpha}{\alpha} \Big|_x^{x+\delta_n} = \frac{2M}{\alpha} \delta_n^\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha = r$ или $\alpha = 1$.

А теперь произведем оценку интеграла I_2 . Для этого сначала заменим переменные

$$\begin{cases} t = \cos v, 0 \leq v \leq \pi, \\ x = \cos u, 0 \leq u \leq \pi \end{cases}$$

в подынтегральном выражении интеграла I_2 :

$$\begin{aligned} \left| \frac{r_n(t) - r_n(x)}{t-x} \right| \sqrt{1-t^2} &= \frac{|r_n(\cos v) - r_n(\cos u)|}{|\cos v - \cos u|} \sin v \leq \frac{\left| \frac{d}{du} r_n(\cos u) \right|_{u=v}}{2 \left| \sin \frac{u-v}{2} \sin \frac{u+v}{2} \right|} (\sin u + \sin v) \leq \\ &\leq \left\| \frac{d}{du} r_n(\cos u) \right\| \frac{|u-v|}{\left| \sin \frac{u-v}{2} \right|} \leq \left\| \frac{d}{du} r_n(\cos u) \right\| \pi \frac{|u-v|}{|u-v|} = \pi \left\| \frac{d}{du} r_n(\cos u) \right\|, \end{aligned}$$

где u^* — среднее значение между u и v , а норма определена равенством $\|\varphi(u)\| = \sup_u |\varphi(u)|$.

Используя (5) и (15), получим:

$$I_2 = \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} \left| \frac{r_n(t) - r_n(x)}{t - x} \right| \sqrt{1-t^2} dt \leq 2\pi \delta_n \left\| \frac{d}{du} r_n(\cos u) \right\| \leq 2\pi C_3 \delta_n n^{r+2}. \quad (16)$$

И наконец, выбирая $\delta_n = \frac{1}{n^{\frac{2r+3}{\alpha}}}$, получаем:

$$\|F(x) - R_n(x)\| \leq \frac{6C_2}{n^{r+1}} \ln n^{\frac{2r+3}{\alpha}} + \frac{2M}{\alpha} \frac{1}{n^{\frac{2r+3}{\alpha}}} + 2\pi C_3 \frac{1}{n^{\frac{2r+3}{\alpha}}} n^{r+2} \leq C_1 \frac{\ln n}{n^{r+1}},$$

где C_1 , равно как C_0 , C_2 и C_3 , не зависит от x и n .

А теперь рассмотрим класс функций $W^r \Omega_M[-1, 1]$, $r \in N$, из пространства $C[-1, 1]$, которые подчинены ограничениям

$$\int_{-1}^{1-(r+1)\tau} |\Delta_{r+1}^r f(x)| dt \leq M \tau^{r+1}, \forall r > 0 \quad (17)$$

на конечные разности порядка $r+1$ с шагом τ

$$\Delta_{r+1}^r f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v=0}^{r+1} (-1)^v C_{r+1}^v f(x + v\tau).$$

Теорема 2. Если плотность $f(t) \in W^r \Omega_M[-1, 1]$, $r \in N$, то существует такая рациональная функция $r_n(t)$, что

$$\|F(x) - R_n(x)\| \leq \frac{C_4}{n^{r+1}} \ln n, \quad (18)$$

где C_4 не зависит от x и n .

Доказательство. Осуществляется также по схеме, предложенной В.Н.Русаком в [2]. Для функций $f(t) \in W^r \Omega_M[-1, 1]$, $r \in N$, существует рациональная функция $r_n(t)$ такая, что выполняется оценка (4) (см. [3]). Опять же производная рациональной функции $r_n(t)$ будет подчинена ограничению (5). При оценке интеграла I_1 , стоящего в правой части неравенства (10), используется тот факт, что если $f(t) \in W^r \Omega_M[-1, 1]$, $r \in N$, то $f(t) \in \text{Lip}_M 1$.

Замечание 1. Неравенства (3) и (19) являются точными в том смысле, что логарифмический множитель в их правых частях не может быть опущен для функций $f(t) \in W^r V[-1, 1]$, $r > 0$, $f(t) \in W^r \Omega_M[-1, 1]$, $r \in N$.

Замечание 2. Если рассматривать сингулярные интегралы (1) без множителя $\sqrt{1-t^2}$ в подынтегральном выражении, то оценки (3) и (19) останутся правильными для $f(t) \in W^r V[-1, 1]$, $r > 0$, и $f(t) \in W^r \Omega_M[-1, 1]$, $r \in N$, соответственно на любом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$.

1. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
2. Он же. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук., 1993. №2. С.22.
3. Русак В. Н., Агафонова Н. К. // ДАН Беларусі. 1995. Т.39. №4. С.18.
4. Старовойтов А. П. // ДАН БССР. 1985. Т.29. №12. С.1079.
5. Агафонова Н. К. Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление: Тез. Междунар. конф. Мн., 1996. С.9.

Поступила в редакцию 16.12.96.