Краткие сообщения

УДК 517.5

Н.К.АГАФОНОВА

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ПРЕДПИСАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

There is found the rate of approximation by special rational operators for functions with derivative of bounded variation.

Пусть задана система параметров $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Определим на действительной оси функции

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\arg(z_k-x), \quad \pi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{x-z_k}{x-\overline{z}_k}$$

и введем рациональное ядро, полагая

$$K(t,x)=\tfrac{1}{4}\left[\pi_n(t)\,\overline{\pi_n(x)}-\pi^2{}_n(t)\left[\overline{\pi_n(x)}\right]^2+\pi_n(x)\,\overline{\pi_n(t)}-\pi^2{}_n(x)\left[\overline{\pi_n(t)}\right]^2\right].$$

Усеченными рациональными операторами типа Валле–Пуссена будем называть действующие в пространстве непрерывных функций $C[a_1,b_1]$ операторы

$$V_{4n-2}(x,f)=\frac{1}{\pi\Phi_n'(x)}\int_{b_1}^{a_1}f(t)K(t,x)\frac{dt}{(t-x)^2}. \tag{1}$$

Введенные операторы позволяют получить хорошую скорость рациональной аппроксимации на всяком меньшем отрезке $[a,b]$, принадлежащем интервалу (a_1,b_1).

Теорема. Пусть $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(x)$, $x\in[a_1,b_1]$ и r-ая производная $f^{(r)}(x)$, $r\in N$, имеет ограниченную вариацию на $[a_1,b_1]$. Тогда существует такой набор параметров $\{z_k\}$, что на отрезке $[a,b]$, $a_1<a<b<b_1$, выполнены неравенства

$$\left|f(x)-V_{4n-2}(x,f)\right|\le\frac{C_1}{n^{r+1}}. \tag{2}$$

Доказательство теоремы связано с представлением (1) и рядом вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Нормы рациональных операторов $V_{4n-2}(x,f)$ как операторов из $C[a_1,b_1]$ в $C[a_1,b_1]$ равномерно ограничены

$$\left\|V_{4n-2}\right\|=\sup_{a_1\le x\le b_1}\frac{1}{\pi\Phi_n'(x)}\int_{a_1}^{b_1}\left|K(t,x)\right|\frac{dt}{(t-x)^2}\le 3.$$

Из исследований [1,2] вытекает

Лемма 2. Выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x)\,dt\Big/(t-x)^2 = \pi\Phi_n'(x).$$

При специальном выборе полюсов произведение Бляшке можно сделать достаточно малым на лучах, параллельных мнимой оси.

Лемма 3. Существует такой набор параметров $\{z_k, \overline{z_k}\}$, что на луче $z=\alpha+i\nu$, $\nu\geq 0$, выполнено неравенство

$$\int_0^{\infty}\prod_{k=0}^{2N-1}\left|\frac{z-z_k}{z-\overline{z_k}}\right|\frac{d\nu}{\nu^2+1}\leq 4e^{-\sqrt{N}},\; N\geq 5. \qquad (3)$$

В качестве подходящего набора параметров достаточно взять

$$z_k=\alpha+i\rho^k,\quad k=\overline{0,N-1};\quad z_k=\alpha+i\rho^{N-k},\quad k=\overline{N,2N-1},$$

где $\rho=\exp\left(-\dfrac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Заметим, что на симметричном луче $z=\alpha+i\nu$, $\nu\leq 0$, будет выполняться аналогичное неравенство, получаемое из (3) заменой z_k на $\overline{z_k}$.

Лемма 4. Если функция $g(z)$ аналитична в замкнутом полукруге $|z|\leq r$, $\operatorname{Im} z\geq 0$, то существует такой набор параметров $\{z_k, \overline{z_k}\}$, что

$$\left|\int_{-r}^{r} g(x)\pi_{2N}(x)dx\right|\leq 8rM_g e^{-\sqrt{N}/2}.$$

Действительно, мы можем деформировать контур интегрирования и, основываясь на том,что функция, аналитичная в замкнутой области, является ограниченной, т.е. $|g(z)|\leq M_g$, получим

$$\left|\int_{-r}^{r} g(x)\pi_{2N}(x)dx\right|\leq M_g\int_{\gamma}|\pi_{2n}(z)||dz|,$$

где γ есть полуокружность с уравнением $z=r\left(\pm\alpha+i\sqrt{1-\alpha^2}\right)$. Далее в качестве нулей произведения Бляшке $\pi_{2n}(z)$ достаточно выбрать числа $z_k=r\left(\pm\alpha_k+i\sqrt{1-\alpha_k^2}\right)$, $\alpha_k=1-\rho^k$, $\rho=e^{-1/\sqrt{N}}$.

Заметим, что эффективность расположения полюсов рациональной функции по геометрической прогрессии была обнаружена в [3] при исследовании приближения $|x|$ на отрезке [-1,1] (см. также [4,5]).

Необходим также некоторый усиленный вариант предыдущей леммы.

Лемма 5. Если функция $g(z)$ аналитична всюду в замкнутом полукруге $|z|\leq r$, $\operatorname{Im} z\geq 0$, кроме точек $z=-r$, $z=r$ и выполнено неравенство

$$|g(z)|\leq M_g\left(\frac{1}{(z-r)^{1/4}}+\frac{1}{(z+r)^{1/4}}\right),$$

то существует такой набор параметров $\{z_k, \overline{z_k}\}$, что

$$\left|\int_{-r}^{r} g(x)\pi_{2N}(x)dx\right| \leq 48r^{3/4}M_g e^{-\sqrt{N}/4}.$$

В процессе доказательства теоремы приходится производить разбиение отрезка $[a_1,b_1]$ с учетом вариации r-ой производной. В этой связи нужна

Лемма 6. Пусть $h(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке $[a_1,b_1]$, $\left[\operatorname{Var} h(t)\right]_{a_1}^{b_1} \leq 1$. Тогда при любом $\varepsilon>0$ существует разбиение отрезка

$$a_1=u_1<u_2<\cdots<u_k<\cdots<u_{\nu+1}=b_1$$

со свойствами

$$|u_{k+1}-u_k| \leq \frac{b_1-a_1}{m}, \quad (u_{k+1}-u_k)^{\varepsilon}\left[\operatorname{Var} h(t)\right]_{u_k}^{u_{k+1}} \leq \frac{(b_1-a_1)^{\varepsilon}}{m^{1+\varepsilon}}, \quad \nu \leq 2m.$$

Лемма 6 известна, ее доказательство имеется в [6].

Замечание. Сравнение оценки (2) и результатов из [7] показывает, что операторы $V_{4n-2}(x,f)$ с предписанными полюсами осуществляют приближение порядка наилучшего рационального приближения в рассматриваемом функциональном классе.

1. Русак В.Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1975. №3. С.39.
2. Он же. // Матем. заметки. 1977. Т.22. №3. С.375.
3. Newman D.J. // Michigan Math. J. 1964. V.11. №1. P.11.
4. Гончар А.А. // Мат. сб. 1969. Т.78. №4. С.640.
5. Petrushev P.P. Popov V.A. Rational approximation of real functions. Cambridge, 1987.
6. Суботин Ю.Н. Черных Н.И. // Мат. заметки. 1970. Т.7. №1. С.31.
7. Попов В.А. // Докл. Болг. АН. 1976. Т.29. №6. С.4.

Поступила в редакцию 03.12.96.

УДК 517.5

А.Н.БОКША

ПРИБЛИЖЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

The exact order for best rational approximation of singular integerals have been obtained. The density of singular integerals have fractional Rieman–Liuville derivative of bounded variation.

В данной работе будем рассматривать сингулярные интегралы:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x\in[-1,1], \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где $f(t)$ принадлежит по меньшей мере к $\mathrm{Lip}_M\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, и исследовать рациональную равномерную аппроксимацию этих функций на отрезке $[-1,1]$. Интегралы вида (1) встречаются при решении интегральных уравнений профиля крыла.

Предположим, что $f(t)$ аппроксимируется рациональными функциями $r_n(t)$ порядка не выше n, и пусть

$$R_n(x) \stackrel{def}{=} \int_{-1}^{1} \frac{r_n(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, x\in[-1,1]. \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что $R_n(x)$ есть также рациональная функция порядка не выше n.

Скорость аппроксимации сингулярного интеграла $F(x)$ рациональными функциями $R_n(x)$ была изучена В.Н.Русаком [2] для случая, когда плотность $f(x)\in\mathrm{Lip}_M\alpha$, $0<\alpha\leq 1$.