УДК 519.65

М.В.ИГНАТЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И СИНУС(КОСИНУС)-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФОРМУЛ ОПЕРАТОРНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

The Newton interpolation formulae for differentiable and nondifferentiable operators in the space $L_2(R_{[+]})$are constructed.

Пусть $X=L_2(R)$, а $F(x)\equiv F(x,t)$, $(t\in T\subseteq R^N)$ — оператор, отображающий X в Y, где Y — некоторое пространство функций, заданных на множестве T.

Введем следующие обозначения

$$F_{i-2}(x)=\begin{cases} F(x),\ i=1; \\ F\left[x_0,x_1,\dots,x_{i-2},x\right]h_{i-1}h_{i-2}\dots h_1,\ i\geq 2, \end{cases}$$

где $F[x_0,x_1,\dots,x_\nu]h_\nu h_{\nu-1}\dots h_1$ – разделенная разность ν-го порядка [1] относительно узлов $x_0,x_1,\dots,x_\nu$ (x_j, $h_j\in X$, $j=\overline{0,\nu}$). Последовательность $F_{i-2}(x)$ может быть построена, если известна первая разделенная разность $F_0(x)=F[x_0,x]h_1$ относительно x_0 и x $(x_0,x,h_1\in X)$.

$$g(\tau,t;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(s)\int_{-\infty}^{\tau}\exp\left(i\theta(s-t)\right)d\theta\, ds.$$

Лемма 1. *Если существует интеграл*

$$F\left[x_0,x_1\right]h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_1,h_1)}{\psi(\tau_1,x_1-x_0)}d_{\tau_1}F\left[x_0(\cdot)+g\left(\tau_1,\cdot;x_1-x_0\right)\right], \tag{1}$$

где $\psi(\tau,h)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau s)h(s)ds$, $h\in X$, *то он определяет по узлам* x_0,x_1 *разделенную разность первого порядка для оператора* $F(x)$ *на* X.

Доказательство. Используя тождества $g(\infty,t;h)\equiv h(t)$ и $g(-\infty,t;h)\equiv 0$, легко получить $F[x_0,x_1](x_1-x_0)=F(x_1)-F(x_0)$. Если $F(x)\equiv F_0$, то $F[x_0,x_1]h_1\equiv 0$ для любого $h_1\in X$.

Пусть $F(x)=\int_a^b y(t,\theta)x(\theta)d\theta,\ t\in T$, тогда

$$F[x_0,x_1]h_1=\frac{1}{2\pi}\int_a^b y(t,\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\tau_1\theta)\psi(\tau_1,h_1)d\tau_1 d\theta=\int_a^b y(t,\theta)h_1(\theta)d\theta=F(h_1),h_1\in X,$$

т.е. формула (1) задает разделенную разность первого порядка для $F(x)$ на X.

Соответственно формула линейной интерполяции имеет вид

$$L_1(x)=F(x_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_1,x-x_0)}{\psi(\tau_1,x_1-x_0)}d_{\tau_1}F\left[x_0(\cdot)+g(\tau_1,\cdot;x_1-x_0)\right].$$

Теорема 1. *Интеграл*

$$F[x_0,x_1,\dots,x_n]h_nh_{n-1}\dots h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_n,h_n)}{\psi(\tau_n,x_n-x_{n-1})}d_{\tau_n}F_{n-2}[\tilde{x}_n(\cdot)], \tag{2}$$

где $\tilde{x}_n(t)\equiv\tilde{x}_n(t,\tau_n)\equiv x_{n-1}(t)+g(\tau_n,t;x_n-x_{n-1})$ $(n\geq 2)$, *(если он существует) определяет разделенную разность* n*-го порядка по узлам* $x_0,x_1,\dots,x_n$ *для оператора* $F(x)$ *на* X.

Доказательство. Пусть $n=2$. Тогда формула (2) принимает вид

$$F[x_0,x_1,x_2]h_2h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_2,h_2)}{\psi(\tau_2,x_2-x_1)}d_{\tau_2}F_0\left[\tilde{x}_2(\cdot)\right].$$

Учитывая, что $\tilde{x}_2(t,\infty)=x_2(t)$ и $\tilde{x}_2(t,-\infty)=x_1(t)$, для $h_2=x_2-x_1$ имеем

$$F[x_0,x_1,x_2](x_2-x_1)h_1 = F[x_0,x_2]h_1 - F[x_0,x_1]h_1.$$

Если $F(x)\equiv F_0$ или $F(x)\equiv x(t)$, $t\in R$, то $F[x_0,x_1,x_2]h_2h_1=0$ для любых $h_1,h_2\in X$.

Пусть $F(x)=x(t_1)x(t_2), t_1,t_2\in R$. Тогда $F'_{\tau_1}\left[G_2^2(\cdot)\right]=g'_{\tau_1}(\tau_1,t_1;\tilde{x}_2-x_0)G_2^2(t_2)+$ $+g'_{\tau_1}(\tau_1,t_2;\tilde{x}_2-x_0)G_2^2(t_1)$, где $G_2^2(t)=x_0(t)+g(\tau_1,t;\tilde{x}_2-x_0)$.

Следовательно,

$$F[x_0,\tilde{x}_2]h_1 =$$
$$=x_0(t_2)h_1(t_1)+x_0(t_1)h_1(t_2)+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g'_{\tau_1}(\tau_1,t_1;h_1)g(\tau_1,t_2;\tilde{x}_2-x_0)+g'_{\tau_1}(\tau_1,t_2;h_1)g(\tau_1,t_1;\tilde{x}_2-x_0)\right\}d\tau_1.$$

Далее, $F[x_0,x_1,x_2]h_2h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g'_{\tau_1}(\tau_1,t_1;h_1)g(\tau_1,t_2;h_2)+g'_{\tau_1}(\tau_1,t_2;h_1)g(\tau_1,t_1;h_2)\right\}d\tau_1$.

Отсюда получим $F[x_0,x_1,x_2](x-x_1)h_1=F[x_0,x]h_1-F[x_0,x_1]h_1$.

При $n>2$ имеем

$$F[x_0,x_1,\ldots,x_n](x_n-x_{n-1})h_{n-1}\ldots h_2h_1 = F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_n]h_{n-1}\ldots h_2h_1 - F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]h_{n-1}\ldots h_2h_1, \quad (3)$$

так как $\tilde{x}_n(t,\infty)=x_n(t)$ и $\tilde{x}_n(t,-\infty)=x_{n-1}(t)$.

Если $F(x)\equiv P_m(x)$, где $P_m(x)=\prod_{j=1}^{m}x(t_j)$, t_j – фиксированные точки из R, $m\le n$, то для $x\in X$

$$\left\{F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x]-F[x_0,x_1,\ldots,x_n]\right\}(x-x_{n-1})h_{n-1}\ldots h_2h_1\equiv 0. \quad (4)$$

Пусть $m=n$. Доказательство проведем методом математической индукции.

При $m=1$ $\left\{F[x_0,x]-F[x_0,x_1]\right\}(x-x_0)=F(x)-F(x_0)-F(x-x_0)\equiv 0$, в силу леммы 1, для $x\in X$. Если же $F(x)=P_2(x)$, то $F_0(x)$ будет многочленом первой степени относительно x.

Предположим, что тождество (4) верно для разделенной разности порядка $n-1$ в случае $F(x)=P_{n-1}(x)$. Можно считать, что $F_{n-2}(x(\cdot))=C_0+C_1x(\cdot)$, где C_0,C_1 – некоторые заданные на T функции. Тогда

$$F[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_{n-1})h_{n-1}\ldots h_2h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_n,x-x_{n-1})}{\psi(\tau_n,x_n-x_{n-1})}d_{\tau_n}F_{n-2}\left[\tilde{x}_n(\cdot)\right]=$$
$$=C_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_n,x-x_{n-1})}{\psi(\tau_n,x_n-x_{n-1})}g'_{\tau_n}(\tau_n,\cdot;x_n-x_{n-1})d\tau_n=C_1(x-x_{n-1})=F_{n-2}(x)-F_{n-2}(x_{n-1})=$$
$$=\left\{F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x]-F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]\right\}h_{n-1}\ldots h_2h_1.$$

Пусть $m>n$. Тогда

$$F[x_0,x_1,\ldots,x_{m+1}]h_{m+1}h_m\ldots h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_{m+1},h_{m+1})}{\psi(\tau_{m+1},x_{m+1}-x_m)}d_{\tau_{m+1}}F_{m-1}\left[\tilde{x}_{m+1}(\cdot)\right]\equiv 0,$$

так как при $F(x)=P_m(x)$ $F_{m-1}(\tilde{x}_{m+1})$ не зависит от $\tilde{x}_{m+1}$ и, следовательно, от τ_{m+1}.

Таким образом, формула (2) действительно задает разделенную разность n-го порядка для оператора $F(x)$ на X.

Замечание 1. Разделенная разность n-го порядка, заданная формулой (2), может быть преобразована к виду

$$F[x_0,x_1,\ldots,x_n]h_nh_{n-1}\ldots h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_n,h_n)}{\psi(\tau_n,G_0^n)}d_{\tau_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_{n-1},h_{n-1})}{\psi(\tau_{n-1},G_1^n)}d_{\tau_{n-1}}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_1,h_1)}{\psi(\tau_1,G_{n-1}^n)}d_{\tau_1}F\left[G_n^n(\cdot)\right], \quad (2')$$

где $G_i^n(t)\equiv G_i^n(t,\tau_n,\tau_{n-1},\ldots,\tau_{n-i+1})$,

$$G_i^n(t)=\begin{cases} x_n(t)-x_{n-1}(t), i=0; \\ x_{n-i}(t)-x_{n-i-1}(t)+g(\tau_{n-i+1},t;G_{i-1}^n), i=\overline{1,n-1}; \\ x_0(t)+g(\tau_1,t;G_{n-1}^n), i=n. \end{cases}$$

На основании соотношения (3) и (4) получим, что для построенного многочлена n-ой степени

$$L_n(x)\equiv L_n(x,t)=F(x_0)+\sum_{k=1}^{n}F[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_{k-1})\ldots(x-x_1)(x-x_0),\quad t\in T, \tag{5}$$

будут верны равенства $L_n(x_k)=F(x_k)$, $k=\overline{0,n}$, и эта формула будет точна для операторных многочленов n-ой степени вида

$$A_n(t,x)=a_0(t)+\sum_{k=1}^{n}\int_{R^k}a_k(t;s_1,s_2,\ldots,s_k)\prod_{j=1}^{k}x(s_j)ds_1ds_2\ldots ds_k, \tag{6}$$

где $a_0(t)$ и $a_k(t;s_1,s_2,\ldots,s_k)$ – произвольно заданные функции, $x\in X$, $t\in T$, $s_j\in R$, $k=\overline{1,n}$.

В частности, квадратичная интерполяционная формула имеет вид

$$L_2(x)=F(x_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_1,x-x_0)}{\psi(\tau_1,x_1-x_0)}d_{\tau_1}F\big[x_0(\cdot)+g(\tau_1,\cdot;x_1-x_0)\big]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\tau_2,x-x_1)\psi(\tau_1,x-x_0)}{\psi(\tau_2,x_2-x_1)}d_{\tau_2}\frac{d_{\tau_1}F(G_2^2(\cdot))}{\psi(\tau_1,\tilde{x}_2-x_0)}.$$

Рассмотрим случай дифференцируемых операторов.

Введем следующие обозначения:

$z_i(t,\tau_i)=x_{i-1}(t)+g(\tau_i,t;h_i)$; $\omega_i(t)=g'_{\tau_i}(\tau_i,t;h_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Лемма 2. *Пусть $F(x)$ – оператор, дифференцируемый по Гато в точке $z_1(\cdot,\tau_1)$ по направлению $\omega_1(\cdot)$, и*

$$\alpha(\lambda)=F\big[z_1(\cdot,\tau_1)+\lambda\omega_1(\cdot)\big]-F\big[z_1(\cdot,\tau_1+\lambda)\big]=o(\lambda), \tag{7}$$

тогда $\delta F_{i-2}\big[z_i(\cdot,\tau_i);\omega_i(\cdot)\big]=\dfrac{\partial}{\partial\tau_i}F_{i-2}\big[z_i(\cdot,\tau_i)\big], i=\overline{1,n}.$

Доказательство. При $i=1$, учитывая условие (7), получим

$$\delta F\big[z_1(\cdot,\tau_1);\omega_1(\cdot)\big]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\big\{\alpha(\lambda)+F\big[z_1(\cdot,\tau_1+\lambda)\big]-F\big[z_1(\cdot,\tau_1)\big]\big\}=\frac{\partial}{\partial\tau_1}F\big[z_1(\cdot,\tau_1)\big].0$$

Пусть $i\geq 2$, тогда $\delta F_{i-2}\big[z_i(\cdot,\tau_i);\omega_i(\cdot)\big]=\beta(\lambda)+\dfrac{\partial}{\partial\tau_i}F_{i-2}\big[z_i(\cdot,\tau_i)\big]$,

где $\beta(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{1}{\lambda}\big\{F_{i-2}\big[z_i(\cdot,\tau_i)+\lambda\omega_i(\cdot)\big]-F_{i-2}\big[z_i(\cdot,\tau_i+\lambda)\big]\big\}$.

Так как $\gamma(\lambda)=z_i(\cdot,\tau_i)+\lambda\omega_i(\cdot)-z_i(\cdot,\tau_i+\lambda)=o(\lambda)$,

то $\beta(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{1}{\lambda}\big\{F\big[x_0,x_1,\ldots,x_{i-2},z_i(\cdot,\tau_i+\lambda),z_i(\cdot,\tau_i)+\lambda\omega_i(\cdot)\big]\gamma(\lambda)h_{i-1}\ldots h_2h_1\big\}=0.$

Лемма 3. *Если существует интеграл*

$$F[x_0,x_1]h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\tau_1,h_1)\delta F\big[x_0(\cdot)+g(\tau_1,\cdot;x_1-x_0);k(\cdot\tau_1)\big]d\tau_1. \tag{8'}$$

где $\tilde{\psi}(\tau,h)=\dfrac{1}{2\pi}\psi(\tau,h)$; $k(t)=\exp(-it)$, *то он определяет по узлам x_0,x_1 разделенную разность первого порядка для оператора $F(x)$, удовлетворяющего условиям леммы 2, на X.*

Доказательство. Используя лемму 2, можно записать

$$F[x_0,x_1](x_1-x_0)=F(x_1)-F(x_0).$$

Если $F(x)\equiv F_0$, то $F[x_0,x_1]h_1\equiv 0$ для любого $h_1\in X$.

Пусть $F(x)=\int_a^b y(t,\theta)x(\theta)d\theta, \quad t\in T$.

Заметим, что в этом случае $\delta F(x;h)\equiv F(h)$, поэтому

$$F[x_0,x_1]h_1=\int_a^b y(t,\theta)\int_{-\infty}^{\infty}k(\tau_1\theta)\tilde{\psi}(\tau_1,h_1)d\tau_1 d\theta=\int_a^b y(t,\theta)h_1(\theta)d\theta=F(h_1), \quad h_1\in X,$$

т.е. формула (8) задает разделенную разность первого порядка для $F(x)$ на X.

Соответственно формула линейной интерполяции имеет вид

$$L_1(x)=F(x_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\tau_1,x-x_0)\delta F\left[x_0(\cdot)+g(\tau_1,\cdot;x_1-x_0);k(\cdot\tau_1)\right]d\tau_1. \qquad (8')$$

Теорема 2. *Интеграл*

$$F[x_0,x_1,\ldots,x_n]h_nh_{n-1}\ldots h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\tau_n,h_n)\delta F_{n-2}\left[\tilde{x}_n(\cdot);k(\cdot\tau_n)\right]d\tau_n \qquad (9)$$

(если он существует) определяет разделенную разность n-го порядка по узлам $x_0,x_1,\ldots,x_n$ $(n\geq 2)$, для оператора $F(x)$, удовлетворяющего условиям леммы 2, на X.

Доказательство. Пусть n=2. Тогда формула (9) принимает вид

$$F[x_0,x_1,x_2]h_2h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\tau_2,h_2)\delta F_0\left[\tilde{x}_2(\cdot);k(\tau_2\cdot)\right]d\tau_2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta F_0\left[\tilde{x}_2(\cdot);\omega_2(\cdot)\right]d\tau_2.$$

Используя лемму 2, при $h_2=x_2-x_1$ имеем

$$F[x_0,x_1,x_2](x_2-x_1)h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau_2}F_0(\tilde{x}_2)d\tau_2=F_0(x_2)-F_0(x_1)=F[x_0,x_2]h_1-F[x_0,x_1]h_1.$$

Если $F(x)\equiv F_0$ или $F(x)\equiv x(t)$, $t\in R$, то $F[x_0,x_1,x_2]h_2h_1=0$ для любых $h_1,h_2\in X$.

Пусть $F(x)=x(t_1)x(t_2)$, $t_1,t_2\in R$.

Тогда $F_0(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\omega_1(t_1)\tilde{x}(t_2)+\omega_1(t_2)\tilde{x}(t_1)\right)d\tau_1$, где $\tilde{x}(t)=x_0(t)+g(\tau_1,t;x-x_0)$.

Далее, $\delta F_0[\tilde{x}_2(\cdot);\omega_2(\cdot)]=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\omega_1(t_1)g\left(\tau_1,t_2;\omega_2(t_2)\right)+\omega_1(t_2)g\left(\tau_1,t_1;\omega_2(t_1)\right)\right\}d\tau_1$.

Поэтому $F[x_0,x_1,x_2](x-x_1)h_1=F[x_0,x]h_1-F[x_0,x_1]h_1$.

При $n>2$ получим, что

$$F[x_0,x_1,\ldots,x_n](x_n-x_{n-1})h_{n-1}\ldots h_2h_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau_n}F_{n-2}(\tilde{x}_n)d\tau_n=F_{n-2}(x_n)-F_{n-2}(x_{n-1}),$$

т.е. $F[x_0,x_1,\ldots,x_n](x_n-x_{n-1})h_{n-1}\ldots h_2h_1=\left\{F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_n]-F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]\right\}h_{n-1}\ldots h_2h_1$.

Покажем, что если $F(x)=P_m(x)$, $m\leq n$, то

$$\left\{F[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x]-F[x_0,x_1,\ldots,x_n]\right\}(x-x_{n-1})h_{n-1}\ldots h_2h_1\equiv 0 \qquad (10)$$

для $x\in X$.

Пусть $m=n$. Для $m=1$ на основании леммы 3 получим, что $\left\{F[x_0,x]-F[x_0,x_1]\right\}(x-x_0)=F(x)-F(x_0)-F(x-x_0)\equiv 0$, $x\in X$, а оператор $F_0(x)$ будет многочленом первой степени относительно x, если $F(x)=P_2(x)$.

Предположим справедливость тождества (10) для разделенной разности $n-1$ порядка в случае, когда $F(x)=P_{n-1}(x)$, и что $F_{n-2}(x)$ — многочлен первой степени. Тогда имеем

$$F[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_{n-1})h_{n-1}\dots h_2h_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta F_{n-2}\left[\widetilde{x}_n(\cdot);g'_{\tau_n}(\tau_n,\cdot;x-x_{n-1})\right]d\tau_n=$$
$$=\left\{F[x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x]-F[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]\right\}h_{n-1}\dots h_2h_1.$$

При $m>n$ $F[x_0,x_1,\dots,x_{m+1}]h_{m+1}\dots h_2h_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta F_{m-1}[\widetilde{x}_{m+1}(\cdot);\omega_{m+1}(\cdot)]d\tau_{m+1}\equiv 0$,

так как $F_{m-1}(x)$ не зависит от x при $F(x)=P_m(x)$ и, следовательно, $\delta F_{m-1}[x;h]\equiv 0$ для любых $x,h\in X$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Разделенная разность n-го порядка, заданная формулой (9), может быть преобразована к виду

$$F[x_0,x_1,\dots,x_n]h_nh_{n-1}\dots h_1=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{\psi}(\tau_i,h_i)\delta^nF\left[G_n^n(\cdot);\widetilde{k}(\cdot\tau_n),\dots,\widetilde{k}(\cdot\tau_2),k(\cdot\tau_1)\right]d\tau_1d\tau_2\dots d\tau_n, \tag{9'}$$

где $\delta^nF[x;h_n,\dots,h_1]$ – дифференциал Гато n-го порядка оператора F в точке x по направлениям $h_1,\dots,h_n$,

$$\widetilde{k}(t\tau_i)=g\big(\tau_1,t;g\big(\tau_2,t;\dots g(\tau_{i-1},t;k(t\tau_i))\dots\big)\big),\quad i=\overline{2,n}.$$

В частности, справедлива следующая квадратичная интерполяционная формула

$$L_2(x)=F(x_0)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\psi}(\tau_1,x-x_0)\delta F\left[x_0(\cdot)+g(\tau_1,\cdot;x_1-x_0);k(\cdot\tau_1)\right]d\tau_1+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}\widetilde{\psi}(\tau_i,x-x_i)\delta^2F\left[G_2^2(\cdot);g(\tau_1,\cdot;k(\cdot\tau_2)),k(\cdot\tau_1)\right]d\tau_1d\tau_2.$$

Замечание 3. Аналогичные результаты справедливы для $\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}$ - преобразования в пространстве $X=L_2(R_+)$. В этом случае формулы, задающие разделенные разности n-го порядка ($n\geq 1$) для недифференцируемых и дифференцируемых по Гато операторов $F(x)$ на X, имеют соответственно вид (1), (2),(2') и (8), (9),(9'), где

$$\psi(\tau,h)=\int\limits_0^{\infty}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\tau s)h(s)ds;\qquad g(\tau,t;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}x(s)\left[\frac{\sin\tau(t-s)}{t-s}\pm\frac{\sin\tau(t+s)}{t+s}\right]ds,$$

$\widetilde{\psi}(\tau,h)=\dfrac{2}{\pi}\psi(\tau,h)$; $k(t)=\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(t)$; $h,x\in X$, а интегрирования в указанных формулах ведутся по R_+.

Интерполяционные формулы n-го порядка в случае преобразования Ганкеля получены в [2].

Пример. Пусть $F(x)=\sin\left\{\int\limits_0^{\infty}K(t,s)x(s)ds\right\}$, где ядро $K(t,s)$ – некоторая заданная на $T\times[0,\infty)$ функция.

Так как $\delta F[x;h]=\cos\left(\int\limits_0^{\infty}K(t,s)x(s)ds\right)\int\limits_0^{\infty}K(t,\widetilde{s})h(\widetilde{s})d\widetilde{s}$, то, используя формулу линейной интерполяции (8') для косинус-преобразования, получим

$$L_1(x)=F(x_0)+\int\limits_0^{\infty}Q(t;s)\left[x(s)-x_0(s)\right]ds,$$

где $Q(t;s)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos(\tau_1s)\delta F\left[\widetilde{x}_1(\cdot);k(\cdot\tau)\right]d\tau_1$.

В заключение укажем, что задача операторного интерполирования в общих гильбертовом и банаховом пространствах исследовалась в [3—7] и некоторых других работах, а в пространствах дифференцируемых функций — в [8,9].

1. Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Мн., 1976.
2. Игнатенко М.В., Янович Л.А. //Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. №2. С.5.
3. Prenter P.M. // J. Approx. Theory. 1971. №4. P.419.
4. Porter W.A. // Inform. and Control. 1975. V.29. №3. P.217.
5. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. // Докл. АН СССР. 1991. Т.321. №3. С.470.
6. Они же. // Там же. 1992. Т.324. №4. С.742.
7. Они же. // Докл. РАН. 1993. Т.329. №3. С.135.
8. Жаврид Н.С., Янович Л.А. // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1996. №1. С.8.
9. Yanovich L.A. // Proc. of the Third Seminar "Nonlinear Phenomena in Complex Systems". Minsk, 1995. V.2. P.76.

Поступила в редакцию 26.11.96.

УДК 519.872

М.А.МАТАЛЫЦКИЙ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СЕТИ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ И РАЗНОТИПНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Recurrent methods with respect to the number of customers and the moments of time are examined. These methods being meant for analysis of the mean values for probabilistic network with central server and different classes of customers.

Методы анализа средних значений, рекуррентные по числу заявок, применялись для исследования экспоненциальных сетей массового обслуживания (МО) с разнотипными заявками и многолинейными системами обслуживания (СМО) [1], в [1—3] — для исследования произвольных сетей с разнотипными заявками и однолинейными СМО, в [4] — для произвольных сетей с однотипными заявками и многолинейными СМО. В данной статье для исследования сети с центральной системой обслуживания с разнотипными заявками и многолинейными СМО предлагаются два метода: рекуррентный по числу заявок и рекуррентный по моментам времени.

Рассмотрим замкнутую сеть с разнотипными заявками, i-ая СМО обслуживает K_i заявок типа i, $i=\overline{1,n-1}$. После обслуживания в i-ой СМО заявка типа i поступает в центральную (n-ую) СМО, обслуживается там и вновь поступает в i-ую СМО, $i=\overline{1,n-1}$. Будем предполагать, что i-ая СМО сети содержит m_i параллельных линий обслуживания, в каждой из которых заявки обслуживаются по произвольному закону с интенсивностью μ_i, $i=\overline{1,n-1}$. Дисциплины обслуживания в СМО сети произвольные; потребуем только, чтобы в каждой из них выполнялся закон сохранения потока заявок.

Метод, рекуррентный по числу заявок. Без ограничения общности будем считать, что $K_1 \le K_2 \le \ldots \le K_{n-1}$. Пусть

$$K=\begin{cases} K_1+K_2+\ldots+K_l+J,\; K_l \le J < K_{l+1}, \\ (n-1)J, \quad J<K_1. \end{cases}$$

Обозначим через $N_i(J)$, $\rho_i(J)$, $\tau_i(J)$ соответственно среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся), среднее число занятых линий и среднее время пребывания заявок (включая ожидание) в i-ой СМО сети в стацио-