$$\Psi(z)=CX_0(z),$$

где C — произвольная комплексная постоянная, а $X_0(z)$ имеет вид

$$X_0^{\pm}(z)=\begin{cases}\exp(\exp(i\nu t))-e,\ z\in D^+,\\ 1,\ z\in D^-.\end{cases}$$

Из однородного краевого условия вытекает, что необходимо выполняются равенства $\Psi^+(t_n)=0$. Профакторизовав краевое условие с помощью функции $X_0(z)$, получим соотношение

$$\Psi(z)=X_0(z)F(z),$$

в котором $F(z)$ — некоторая целая функция.

Пусть $\Psi(z)$ — ограниченное решение задачи, т.е. существует постоянная $C_1>0$ такая, что $|\Psi(z)|\leq C_1$, $z\in\mathbb{C}$. Тогда, согласно определению $X_0(z)$, будет $|F(z)|\leq C_1$, $z\in\{Im\ z\leq 0\}$.

Рассмотрим контур Г, состоящий из объединения полуокружностей $\left\{|z|=\pi(2|n|+1)\nu^{-1}, \operatorname{Im} z\geq 0\right\}$, $\left\{\left|z-2\pi n\nu^{-1}\right|=\pi(3\nu)^{-1}, \operatorname{Im} z\geq 0\right\}$ и отрезков $[2\pi n\nu^{-1}+\pi(3\nu)^{-1}, 2\pi n\nu^{-1}+5\pi(3\nu)^{-1}]$, $n\in Z$. С помощью элементарных вычислений получаем, что справедливо неравенство

$$\left|X_0^+(z)\right|\geq e-\sqrt{e},\ z\in\Gamma.$$

Отсюда с помощью принципа максимума модуля аналитической функции нетрудно заключить, что $|F(z)|\leq C_1$, $z\in\{Im\ z\geq 0\}$. Таким образом, $F(z)$ ограничена во всей комплексной плоскости и, следовательно, по теореме Лиувилля равна постоянной. Это доказывает утверждение примера.

Ситуация, когда задача со счетным множеством нулей коэффициента имеет единственное решение, выявлена автором впервые.

1. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин И.М. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
4. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986.

Поступила в редакцию 12.12.96

УДК 519.95

Г.Л.КАРАСЕВА

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОМЕРНОГО УПРАВЛЕНИЯ

For a linear problem of optimal multidimensional control with phase constrains the increment formula of the performance index is obtained and the constructive (without using the notions of measures) optimality criterion is formulated.

Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями относится к классу сложнейших экстремальных задач. С результатами качественной теории таких задач можно ознакомиться в работах [1,2]. В работах [3–6] основное внимание уделено конструктивным вопросам. В данной статье с аналогичных позиций исследуется линейная задача многомерного управления с фазовыми ограничениями. Получена формула приращения критерия качества и сформулирован конструктивный критерий оптимальности (без использования мер).

1. Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных скалярных функций рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$J(u)=c'x(t^*)\rightarrow\max\ ,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$
$$d'x(t) \leq \alpha(t), \; |u(t)| \leq 1, \; t \in T,$$

где $x=x(t)$ − n-вектор состояния системы в момент времени t; A − постоянная $n\times n$-матрица; B − постоянная $n\times r$-матрица, $r>1$; $u(t)=(u_1(t),...,u_r(t))$, $t\in T$ − r-мерное управление; c, d − заданные векторы соответствующих размеров; $\alpha(t)$, $t\in T$, − непрерывная функция.

Управление $u(\cdot)=(u(t),\ t\in t)$ и соответствующая ему траектория $x(\cdot)= =(x(t),\ t\in t)$ называются допустимыми, если они удовлетворяют всем ограничениям задачи (1). Оптимальными будем называть допустимые управление $u^0(\cdot)$ и траекторию $x^0(t)$, на которых критерий качества $J(u)=c'x(t^*)$ задачи (1) достигает максимального значения. Допустимое управление $u^\varepsilon(\cdot)$, для которого выполняется неравенство $J(u^0(\cdot))-J(u^\varepsilon(\cdot))\leq\varepsilon$, будем называть ε-допустимым (субоптимальным) управлением.

Будем считать, что $d'b_i\neq 0$, $i=\overline{1,r}$ и ограничения задачи (1) удовлетворяют условию типа Слейтера, т.е. существует такое допустимое управление $\overline{u}(\cdot)$, что вдоль соответствующей ему траектории $\overline{x}(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in T}\left(d'\overline{x}(t)-\alpha(t)\right)<0\,.$$

2. Формула приращения критерия качества. Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$и соответствующую ему траекторию $x(\cdot)$. Обозначим:

$$T_a=\left\{t\in T: d'x(t)=\alpha(t)\right\}=\bigcup_{i\in N_a} T_{ai}\,,$$
$$T_{ai}=[\tau_i,\tau^i],\ \tau_i\leq\tau^i<\tau_{i+1},\ i\in N_a=\{1,2,...,p\}, \tag{2}$$
$$N_{a*}=\{i\in N_a:\ \tau_i<\tau^i\},\ N_{a0}=N_a\backslash N_{a*}.$$

Каждый отрезок T_{ai}, $i\in N_{a*}$ разобьем на подотрезки $T_{ij}=[\tau_{ij},\tau_{ij+1}]$, $\tau_{ij}<\tau_{ij+1}$, $j=\overline{1,m_i}$, $\tau_{i1}=\tau_i$, $\tau_{im_i+1}=\tau^i$ таким образом, чтобы для каждого $j\in\{1,...,m_i\}$ существовало подмножество $I_j(i)\in I=\{1,2,...,r\}$, при котором а) $|u_s(t)|=1$, $t\in T_{ij}$, $s\in I\backslash I_j(i)$; б) для $s\in I_j(i)$ равенство $|u_s(t)|=1$ возможно лишь в изолированных точках $t\in T_{ij}$. Обозначим $T_{i0}=]\tau^{i-1},\tau_i[$, $\tau^0=0$, $\tau_{p+1}=t^*$.

Определение. Допустимое управление $u(\cdot)$ называется регулярным, если $I_j(i)\neq\varnothing$ и для $s\in I_j(i)$ равенство $|u_s(t)|=1$ возможно в конечном числе точек $t\in T_{ij}$, $j=\overline{1,m_i}$, $i=\overline{i,p}$.

Наряду с допустимым управлением $u(\cdot)$и соответствующей ему траекторией $x(\cdot)$ рассмотрим допустимое управление $\widetilde{u}(\cdot)$ и соответствующую траекторию $\widetilde{x}(\cdot)$. Обозначим

$$\Delta x(t)=\widetilde{x}(t)-x(t)\,,\ \omega(t)=\alpha(t)-d'x(t)\,,$$
$$\widetilde{\omega}(t)=\alpha(t)-d'\widetilde{x}(t)=\omega(t)+\Delta\omega(t)\,, \tag{3}$$
$$\Delta\omega(t)=-d'\Delta x(t),\ t\in T.$$

Из допустимости управлений $u(\cdot)$, $\widetilde{u}(\cdot)$ следует

$$\Delta\dot{x}=A\Delta x+B\Delta u\,,$$
$$d'\Delta x(t)+\Delta\omega(t)=0\,,\ -1-u(t)\leq\Delta u(t)\leq 1-u(t)\,, \tag{4}$$
$$\Delta\omega(t)\geq-\omega(t),\ t\in T.$$

Тождества

$$d'\Delta x(t)+\Delta\omega(t)\equiv 0,\ t\in T_{ij},\ j=\overline{1,m_i},\ i\in N_a, \tag{5}$$

эквивалентны следующим соотношениям

$$d'\Delta x(\tau_{ij})+\Delta\omega(\tau_{ij})=0\,,\ j=\overline{1,m_i}\,,\ i\in N_a\,, \tag{6}$$

$$d'A\Delta x(t)+d'B\Delta u(t)+\Delta\dot{\omega}(t)=0\,,\ t\in T_{ij}\,,\ j=\overline{1,m_i}\,,\ i\in N_{a*}\,. \tag{7}$$

Из (7) получим

$$\Delta u_{s(ij)}=\left(-d'A\Delta x(t)-\sum_{\substack{k=1\\k\notin s(ij)}}^{r}d'b_k\Delta u_k-\Delta\dot{\omega}(t)\right)\Bigg/d'b_{s(ij)}\,,\ s(ij)\in I_j(i). \tag{8}$$

Подставим (8) в систему (4):

$$\Delta\dot{x}=A(t)\Delta x+B(t)\Delta u+G(t)\Delta\dot{\omega}\,,\ \Delta x(0)=0\,, \tag{9}$$

где

$$A(t)=A,\ B(t)=B,\ G(t)=0,\ t\in T_{\text{H}}=T\setminus\bigcup_{i\in N_{a*}}T_{ai}\,,$$

$$\text{A}(t)=A_{s(ij)},\ B(t)=B_{s(ij)},\ G(t)=G_{s(ij)},\ t\in T_{ij},\ j=\overline{1,m_i}\,,\ i\in N_{a*}, \tag{10}$$

$$A_{s(ij)}=\left(E-\frac{b_{s(ij)}d'}{d'b_{s(ij)}}\right)A\,,\ B_{s(ij)}=\left(E-\frac{b_{s(ij)}d'}{d'b_{s(ij)}}\right)B\,,\ G_{s(ij)}=-\frac{b_{s(ij)}}{d'b_{s(ij)}}\,.$$

Обозначим через $F(t,\tau)$, $t\geq\tau$, фундаментальную матрицу решений системы $\dot{x}=A(t)x$. Считаем, что $F(t,\tau)\equiv 0$ при $t<\tau$.

Согласно формуле Коши, для траектории $\Delta x(t)$, $t\in T$, системы (9) при $t\in T_{i_0j_0}$ имеем

$$\Delta x(t)=\int_0^t F(t,\tau)B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau+\sum_{\substack{i\in N_{a*}\\i<i_0}}\int_{T_{ai}}F(t,\tau)A(\tau)G(\tau)\Delta\omega(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{\substack{i\in N_{a*}\\i<i_0}}\left(\frac{F(t,\tau_{i1})b_{s(i1)}}{d'b_{s(i1)}}\Delta\omega(\tau_{i1})+\sum_{j=2}^{m_i}F(t,\tau_{i1})\left(\frac{b_{s(ij)}}{d'b_{s(ij)}}-\frac{b_{s(ij-1)}}{d'b_{s(ij-1)}}\right)\Delta\omega(\tau_{ij})-\frac{F(t,\tau_{im_i+1})b_{s(im_i)}}{d'b_{s(im_i)}}\Delta\omega(\tau_{im_i+1})\right)-$$

$$-\begin{cases}0, & t\in T_{i_00},\\ \dfrac{b_{s(i_0j_0)}}{d'b_{s(i_0j_0)}}\Delta\omega(t), & t\in \operatorname{int}T_{i_0j_0}\,,\ j_0=\overline{1,m_{i_0}}\,.\end{cases} \tag{11}$$

С учетом (11) получим

$$c'\Delta x(t^*)=\int_0^t c'F(t^*,\tau)B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau+\sum_{i\in N_{a*}}\int_{T_{ai}}c'F(t^*,\tau)A(\tau)G(\tau)\Delta\omega(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{i\in N_{a*}}\left(\frac{c'F(t^*,\tau_{i1})b_{s(i1)}}{d'b_{s(i1)}}\Delta\omega(\tau_{i1})+\sum_{j=2}^{m_i}c'F(t^*,\tau_{ij})\left(\frac{b_{s(ij)}}{d'b_{s(ij)}}-\frac{b_{s(ij-1)}}{d'b_{s(ij-1)}}\right)\Delta\omega(\tau_{ij})-\frac{c'F(t^*,\tau_{im_i+1})b_{s(im_i)}}{d'b_{s(im_i)}}\Delta\omega(\tau_{im_i+1})\right); \tag{12}$$

$$0=\Delta\omega(\tau_{i1})+d'\Delta x(\tau_{i1})=\Delta\omega(\tau_{i1})+\int_0^{\tau_{i1}}d'F(\tau_{i1},\tau)B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{\substack{k\in N_{a*}\\k\leq i}}\int_{T_{ak}}d'F(\tau_{i1},\tau)A(\tau)G(\tau)\Delta\omega(\tau)d\tau+ \tag{13}$$

$$+\sum_{\substack{k\in N_{a*}\\k\leq i}}\left(\frac{d'F(\tau_{i1},\tau_{k1})b_{s(k1)}}{d'b_{s(k1)}}\Delta\omega(\tau_{k1})+\sum_{l=2}^{m_k}d'F(\tau_{i1},\tau_{kl})\left(\frac{b_{s(kl)}}{d'b_{s(kl)}}-\frac{b_{s(kl-1)}}{d'b_{s(kl-1)}}\right)\Delta\omega(\tau_{kl})-\frac{d'F(\tau_{i1},\tau_{km_k+1})b_{s(km_k)}}{d'b_{s(km_k)}}\Delta\omega(\tau_{km_k+1})\right),$$

$$i\in N_a.$$

Умножим равенства (13) на числа $\overline{\upsilon}_i, i \in N_a$. Сложим их и добавим к (12). В результате получим формулу приращения критерия качества:

$$c'\Delta x(\tau^*) = \int_0^{t^*} \psi'(\tau)B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau + \sum_{i\in N_{a*}} \int_{T_{ai}} \psi'(\tau)A(\tau)G(\tau)\Delta\omega(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{i\in N_{a*}}\left(\psi'(\tau_{i1}-0)\frac{b_{s(i1)}}{d'b_{s(i1)}}\Delta\omega(\tau_{i1})+\sum_{j=2}^{m_i}\psi'(\tau_{ij})\left(\frac{b_{s(ij)}}{d'b_{s(ij)}}-\frac{b_{s(ij-1)}}{d'b_{s(ij-1)}}\right)\Delta\omega(\tau_{ij})-\psi'(\tau_{im_i+1})\frac{b_{s(im_i)}}{d'b_{s(im_i)}}\Delta\omega(\tau_{im_i+1})\right)+ \quad (14)$$

$$+\sum_{i\in N_{a0}}\overline{\upsilon}_i\Delta\omega(\tau_i).$$

Здесь $\psi(t)$, $t \in T$, – решение системы

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi,\ \psi(t^*) = c,$$

$$\psi(\tau_i - 0) = \psi(\tau_i + 0) + d'\overline{\upsilon}_i,\ i \in N_a. \quad (15)$$

Замечание. Скачки в точках $\tau_{ij}, j = \overline{2, m_i}, i \in N_a$, фактически переносятся в точку τ_i. Можно сделать m_i скачков: в точке τ_{i1} – скачок υ_{i1}; в точке τ_{i2} – скачок υ_{i2}; и т.д. Но это будет эквивалентно тому, что делается только один скачок $\overline{\upsilon}_i$ величины $\upsilon_{i1}+\upsilon_{i2}+\dots+\upsilon_{m_i}$ в точках τ_i.

3. Критерий оптимальности. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть ограничения задачи (1) регулярны. Тогда для оптимальности регулярного управления $u(\cdot)$необходимо и достаточно существования такого вектора $\nu = (\overline{\upsilon}_i, i \in N_a)$, что вдоль соответствующего ему решения $\psi(\cdot)$ системы (15) и управления $u(\cdot)$ выполняются следующие соотношения:

$$\psi'(t)B(t)u(t) = \max_{|u|\le 1} \psi'(t)B(t)u, \quad t \in T;$$

$$\psi'(\tau_{i1}-0)\frac{b_{s(i1)}}{d'b_{s(i1)}} \le 0,\ \psi'(\tau_{ij})\left(\frac{b_{s(ij)}}{d'b_{s(ij)}}-\frac{b_{s(ij-1)}}{d'b_{s(ij-1)}}\right) \le 0, \quad (16)$$

$$\psi'(\tau_{im_i+1})\frac{b_{s(im_i)}}{d'b_{s(im_i)}} \ge 0,\ j = \overline{2, m_i},$$

$$\psi'(t)A(t)G(t) \le 0,\ t \in T_{ai},\ i \in N_{a*},\ \overline{\upsilon}_i \le 0, i \in N_{a0}.$$

Данный критерий оптимальности носит конструктивный характер: поскольку при его формулировке не используются меры. Согласно теореме, исходная бесконечномерная проблема сводится к поиску конечномерного вектора скачков. С точки зрения разработки численных методов это имеет большое значение, так как позволяет использовать критерий оптимальности для построения эффективного алгоритма решения задачи (1).

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко С.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.

2. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т.5. №3. С.395.

3. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч.2. Задачи управления. Мн.; 1984.

4. Костюкова О.И. Оптимизация линейных динамических систем с фазовыми ограничениями. Мн., 1989. (Препринт / АН БССР. Институт математики; 29(279)).

5. Она же. Конечный алгоритм оптимизации линейной динамической системы со смешанными ограничениями. Мн., 1990. (Препринт / АН БССР. Институт математики; 24(424)).

6. Карасева Г.Л. Метод решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и подвижным начальным состоянием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1. С.48.

Поступила в редакцию 20.11.96.