Легко видеть, что фундаментальная нормированная при $t=s$ матрица решений системы (26) имеет вид

$$Y(t)=\exp\left(V\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)\cdot\exp\left(E\int_s^t(\lambda f(\tau)+g(\tau))d\tau\right),$$

где $V=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$L(t)=\exp\left(V\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right) & \sin\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)\\ -\sin\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right) & \cos\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)\end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Таким образом, $Y(t)=L(t)Z(t)$, где $Z(t)$ — фундаментальная нормированная при $t=s$ матрица решений системы

$$dz/dt=(\lambda f(t)+g(t))Ez. \qquad (28)$$

Из (27) следует, что $L(t)$ — ортогональная матрица с ограниченной на $[s,+\infty[$ производной, поэтому система (26) асимптотически эквивалентна диагональной системе (28) с функционально коммутативной матрицей коэффициентов.

Итак, мы показали, что любая система (25) с функционально коммутативной матрицей коэффициентов приводима к треугольной системе с функционально коммутативной матрицей коэффициентов. Следовательно, если бы для системы (1) существовала асимптотически эквивалентная система (25), то для (1) существовала бы и треугольная асимптотически эквивалентная система с функционально коммутативной матрицей коэффициентов. Поэтому, в силу теоремы 1, имеет место

Теорема 2. *Существует такая линейная дифференциальная система, которая не приводима с помощью преобразования Ляпунова ни к одной системе с функционально коммутативной матрицей коэффициентов.*

1. Богданов Ю.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1969. №1. С.10.
2. Он же. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №6. С.707.
3. Мазаник С.А. // Там же. 1981. Т.17. №5. С. 923.
4. Морозов В.В. // Уч. зап. КГУ. Математика и механика. 1952. Т.112. Кн.9. С.17.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.

Поступила в редакцию 15.11.96.

УДК 517.944

А.Г.АЛЕХНО

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА С КОЭФФИЦИЕНТОМ, ИМЕЮЩИМ ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОНЕЧНОЕ КОЛЕБАНИЕ АРГУМЕНТА

It is constructed general solution for Riemann boundary value problem with a coefficient discontinuous of the second kind.

Пусть L — вещественная ось, D^+ — верхняя, D^- — нижняя полуплоскости. Исследована краевая задача Римана, состоящая в отыскании функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических соответственно в областях $D^{\pm}$, непрерывные граничные значения которых удовлетворяют соотношению

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L. \qquad (1)$$

Заданные функции $G(t)$ и $g(t)$ подчинены условиям:

1) $G(t)=\exp\{\varphi(t)\exp(i\psi(t)t\}$, $\varphi(t)\in H$, $\varphi(\infty)=\lambda\neq 0$, $\psi(t)=\nu+\alpha(t)(t+i)^{-1}$, $\nu\in R\setminus\{0\}$, $\alpha(t)\in H$, $\alpha(\infty)=0$, (2)

2) $g(t)\in\mathrm{H}$, $g(\infty)=0$. (3)

Из условий 1) следует, что коэффициент $G(t)$ имеет в бесконечно удаленной точке разрыв второго рода, а $\arg G(t)$ и $\ln|G(t)|$ могут иметь в ее окрестности произвольное конечное колебание. В частности, при $\lambda\in\mathbf{R}$ значения указанных функций в любой окрестности бесконечности полностью заполняют отрезок $[-|\lambda|,|\lambda|]$.

Решение задачи будем искать в классе **B** ограниченных и аналитических в верхней D^+ и нижней D^- полуплоскостях функций, имеющих непрерывные граничные значения на вещественной оси.

Каноническую функцию исследуемой задачи Римана введем по формуле

$$X^{\pm}(z)=\exp\left(\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\exp(i\psi(x)x)dx}{(x+i)(x-z)}\right). \tag{4}$$

Лемма 1. Каноническая функция является решением из класса **B** однородной задачи Римана

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ t\in L, \tag{5}$$

и при $\nu>0$ для нее справедливо представление

$$X(z)=\begin{cases}\exp(\lambda\exp(i\nu z))X_0^+(z),\ z\in D^+,\\ X_0^-(z),\ z\in D^-,\end{cases} \tag{6}$$

где $X_0^{\pm}(z)$ — ограниченные аналитические в $D^{\pm}$ и непрерывные в $\overline{D^{\pm}}$ функции. Кроме того, $(X(z))^{-1}\in\mathbf{B}$.

Доказательство. Запишем каноническую функцию в виде

$$\ln X(z)=\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda e^{i\nu x}dx}{(x+i)(x-z)}+\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\varphi(x)-\lambda)e^{i\nu x}dx}{(x+i)(x-z)}+$$

$$+\frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)e^{i\nu x}(e^{i(\psi(x)-\nu)x}-1)dx}{(x+i)(x-z)}\equiv(I_1+I_2+I_3)(z).$$

Интеграл $I_1(z)$ вычисляется с помощью леммы Жордана [1, с.239]

$$I_1(z)=\begin{cases}\lambda\exp(i\nu z),\ z\in D^+,\\ 0,\ z\in D^-.\end{cases}$$

Так как по условию $\varphi(x)\in\mathrm{H}$, $\varphi(\infty)=\lambda\neq0$, то, согласно [2, с.26], будет $(\varphi(x)-\lambda)e^{i\nu x}\in\mathrm{H}$. Поэтому [3, с.49]

$$I_2(z)\in\mathbf{B},\ I_2^{\pm}(t)\in\mathrm{H}.$$

Покажем теперь, что $b(x)=e^{i(\psi(x)-\nu)x}-1$ удовлетворяет условию Гельдера в бесконечно удаленной точке. Для достаточно больших x, учитывая, что $\alpha(\infty)=0$, имеем

$$|b(x)|=\left|e^{i\alpha(x)x(x+i)^{-1}}-1\right|\le2\left|\alpha(x)x(x+i)^{-1}\right|\le2|\alpha(x)|<C|x|^{-\mu},\ b(\infty)=0.$$

Значит, $b(x)\in\mathrm{H}$. Поэтому аналогично предыдущему $\varphi(x)b(x)e^{i\nu x}\in\mathrm{H}$ и

$$I_3(z)\in\mathbf{B},\ I_3^{\pm}(t)\in\mathrm{H}.$$

Из полученных соотношений вытекает утверждение леммы.

Следствие 1. Если $\nu<0$, то имеет место представление

$$X(z)=\begin{cases}X_1^+(z),\ z\in D^+,\\ \exp(\lambda\exp(i\nu z))X_1^-(z),\ z\in D^-,\end{cases} \tag{6*}$$

в котором $\left(X_1^{\pm}(z)\right)^{\pm1}\in\mathbf{B}$.

Следствие 2. Граничные значения $X^{\pm}(t)$ канонической функции принадлежат классу $\tilde{\mathrm{H}}$ функций, ограниченных на L и удовлетворяющих условию Гельдера на любом отрезке вещественной оси.

Лемма 2. Однородная краевая задача Римана (5), (2) имеет единственное решение в классе B, которое дается формулой

$$\Phi(z)=CX(z),$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

Доказательство. Любое ограниченное решение задачи представимо в виде

$$\Phi(z)=X(z)F(z),$$

где $F(z)$ — целая функция. Так как по лемме 1 $(X(z))^{\pm 1}\in$B, то $F(z)\in$B, что по теореме Лиувилля [1, с.121] означает $F(z)=const$.

Лемма 3. Функция

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)dx}{X^{+}(x)(x-z)}$$

является ограниченным решением неоднородной задачи (1).

Доказательство. В силу условий (3) и следствия 2 леммы 1 имеем $g(x)(X^{+}(x))^{-1}\in$H [4, с.128]. Поэтому интеграл типа Коши в последней формуле ограничен [3, с.46], и, следовательно, $\Phi_0(z)\in$B.

Теорема 1. Краевая задача Римана (1)–(3) имеет единственное ограниченное решение, которое выражается формулой

$$\Phi(z)=CX(z)+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)dx}{X^{+}(x)(x-z)},$$

где $X(z)$ — каноническая функция (4), а C — произвольная комплексная постоянная.

Теорема 1 вытекает из лемм 2, 3.

Теорема 2. Для краевой задачи Римана с коэффициентом $G_*(t)=G(t)G_0(t)$, где $G(t)$ удовлетворяет условиям (2), а $G_0(t)\in$H, справедливы все результаты классической теории [3, гл.2].

Теорема следует из свойств канонической функции (4), установленных в лемме 1.

Замечание. Полученные результаты остаются справедливыми при $\nu>0$ ($\nu<0$) для любого бесконечного замкнутого гладкого контура, лежащего в верхней (нижней) полуплоскости. Доказательство их проходит по изложенной схеме, но они становятся более громоздкими.

Приведем два интересных, на наш взгляд, примера, связанных с исследованной задачей Римана.

Пример 1. Пусть $D_0=\{0<\arg z<\pi\rho^{-1}\}$, $\rho>1/2$, граница ∂D_0 положительно ориентирована и

$$G(t)=\exp(\varphi(t)\exp(i\psi(t)t^{\rho})),\ t\in\partial D_0,$$

где заданные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют тем же условиям, что в (2). Если $\nu>0$, то задача Римана имеет единственное ограниченное решение.

Утверждение примера получается с помощью конформного отображения области D_0 на верхнюю полуплоскость. Решение задачи записывается той же формулой, что и в теореме 1, только интегрирование ведется по ∂D_0.

Пример 2. Однородная краевая задача Римана с коэффициентом

$$G(t)=\exp(\exp(i\nu t))-e,\ t\in\mathbb{R},\ \nu>0,$$

имеющим счетное множество нулей в точках $t_n=2\pi n\nu^{-1}$, $n\in Z$, обладает единственным ограниченным решением, которое дается формулой

$$\Psi(z)=CX_0(z),$$

где C — произвольная комплексная постоянная, а $X_0(z)$ имеет вид

$$X_0^{\pm}(z)=\begin{cases}\exp(\exp(i\nu t))-e,\ z\in D^+,\\ \quad 1,\ z\in D^-.\end{cases}$$

Из однородного краевого условия вытекает, что необходимо выполняются равенства $\Psi^+(t_n)=0$. Профакторизовав краевое условие с помощью функции $X_0(z)$, получим соотношение

$$\Psi(z)=X_0(z)F(z),$$

в котором $F(z)$ — некоторая целая функция.

Пусть $\Psi(z)$ — ограниченное решение задачи, т.е. существует постоянная $C_1>0$ такая, что $|\Psi(z)|\leq C_1$, $z\in\mathbf{C}$. Тогда, согласно определению $X_0(z)$, будет $|F(z)|\leq C_1$, $z\in\{Im\ z\leq 0\}$.

Рассмотрим контур Г, состоящий из объединения полуокружностей $\left\{|z|=\pi(2|n|+1)\nu^{-1}, \operatorname{Im} z\geq 0\right\}$, $\left\{\left|z-2\pi n\nu^{-1}\right|=\pi(3\nu)^{-1}, \operatorname{Im} z\geq 0\right\}$ и отрезков $[2\pi n\nu^{-1}+\pi(3\nu)^{-1}, 2\pi n\nu^{-1}+5\pi(3\nu)^{-1}]$, $n\in Z$. С помощью элементарных вычислений получаем, что справедливо неравенство

$$\left|X_0^+(z)\right|\geq e-\sqrt{e},\ z\in\Gamma.$$

Отсюда с помощью принципа максимума модуля аналитической функции нетрудно заключить, что $|F(z)|\leq C_1$, $z\in\{Im\ z\geq 0\}$. Таким образом, $F(z)$ ограничена во всей комплексной плоскости и, следовательно, по теореме Лиувилля равна постоянной. Это доказывает утверждение примера.

Ситуация, когда задача со счетным множеством нулей коэффициента имеет единственное решение, выявлена автором впервые.

1. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин И.М. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
4. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986.

Поступила в редакцию 12.12.96

УДК 519.95

Г.Л.КАРАСЕВА

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОМЕРНОГО УПРАВЛЕНИЯ

For a linear problem of optimal multidimensional control with phase constrains the increment formula of the performance index is obtained and the constructive (without using the notions of measures) optimality criterion is formulated.

Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями относится к классу сложнейших экстремальных задач. С результатами качественной теории таких задач можно ознакомиться в работах [1,2]. В работах [3–6] основное внимание уделено конструктивным вопросам. В данной статье с аналогичных позиций исследуется линейная задача многомерного управления с фазовыми ограничениями. Получена формула приращения критерия качества и сформулирован конструктивный критерий оптимальности (без использования мер).

1. Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных скалярных функций рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$J(u)=c'x(t^*)\rightarrow\max\ ,$$