УДК 517.926

Л.А.МАЗАНИК, С.А.МАЗАНИК

О НЕПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ К СИСТЕМАМ С ФУНКЦИОНАЛЬНО КОММУТАТИВНЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

An asymptotical equivalence of linear differential systems and Lappo-Danilevski systems is investigated. It is proved that there exist linear systems which are asymptotical equivalent neither to triangular Lappo-Danilevski systems nor to the systems with functional commutative matrices of coefficients.

Задача классификации линейных дифференциальных систем относительно преобразования Ляпунова тесно связана [1] с задачей построения систем-представителей классов эквивалентности. Выбор таких систем обусловливается возможностью конструктивного построения их асимптотических характеристик, например (см.[2,3]), в качестве систем-представителей могут быть использованы системы с кусочно постоянными коэффициентами. Было бы удобно использовать в качестве систем-представителей системы Лаппо-Данилевского или же системы с функционально коммутативными матрицами коэффициентов, поскольку для таких систем фундаментальные матрицы решений строются как экспоненты интегралов от матриц коэффициентов. К сожалению, не все линейные системы приводимы к системам Лаппо-Данилевского. Целью данной статьи является доказательство существования линейных систем дифффеpенциальных уравнений, которые не являются асимптотичеки эквивалентными ни треугольным системам Лаппо-Данилевского, ни системам с функционально коммутативными матрицами коэффицентов.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x,\ x\in\mathrm{R}^n,\ t\in[s,+\infty[, \tag{1}$$

где $A(t)$ – матрица с ограниченными и непрерывными на $[s,+\infty[$ элементами. Системой Лаппо-Данилевского называют систему

$$dy/dt = B(t)y,\ y\in\mathrm{R}^n,\ t\in[s,+\infty[, \tag{2}$$

с непрерывной и ограниченной на $[s,+\infty[$ матрицей $B(t)$, причем такой, что существует $T\geq s$, для которого

$$B(t)\cdot\int_T^t B(\tau)d\tau = \int_T^t B(\tau)d\tau\cdot B(t),\quad \forall\, t\geq T. \tag{3}$$

Частным случаем систем Лаппо-Данилевского являются системы с функционально коммутативными матрицами коэффициентов, т.е. с матрицами $B(t)$, удовлетворяющими условию $B(t_1)\cdot B(t_2)=B(t_2)\cdot B(t_1)$, $\forall\ t_1,t_2\geq s$.

Лемма. *Если непрерывные на промежутке* $]T_1,s_1[$, $T_1<s_1\leq+\infty$, *функции* φ *и* ψ *таковы, что для некоторого* T, $T_1\leq T<s_1$,

$$\int_{T_1}^t \varphi(\tau)d\tau\neq 0,\quad \forall t\in]T,s_1[$$

и

$$\psi(t)\int_{T_1}^t \varphi(\tau)d\tau = \varphi(t)\int_{T_1}^t \psi(\tau)d\tau,\quad \forall t\in[T,s_1[, \tag{4}$$

то существует такая постоянная с, что

$$\psi(t) = c\varphi(t),\ \forall t\in[T,s_1[. \tag{5}$$

Доказательство. Из (4) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{T_1}^t \psi(\tau)d\tau \Big/ \int_{T_1}^t \varphi(\tau)d\tau\right) = 0,\ \forall t\in]T,s_1[.$$

Поэтому существует такая постоянная c, что

$$\int_{T_1}^{t}\psi(\tau)d\tau \Big/ \int_{T_1}^{t}\varphi(\tau)d\tau = c, \ \forall t\in]T,s_1[,$$

и, следовательно, $\int_{T_1}^{t}(\psi(\tau)-c\varphi(\tau))d\tau=0, \ \forall t\in]T,s_1[$. Дифференцируя последнее равенство по t на промежутке $]T,s_1[$, получим $\psi(t)-c\varphi(t)=0, \ \forall t\in]T,s_1[$. С учетом непрерывности функций φ и ψ получаем соотношение (5).

Рассмотрим систему (1) с матрицей коэффициентов

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1/t\end{pmatrix}, \ t\geq s=1. \qquad (6)$$

Фундаментальная нормированная при $t=s$ матрица решений такой системы будет иметь вид $X(t)=(x_{ij}(t))$, $i,j=1,2$, где

$$x_{11}(t)=1, \ x_{12}(t)=(t^2-s^2)/(2s), \ x_{21}(t)=0, \ x_{22}(t)=t/s.$$

Предположим, что для системы (1) с матрицей коэффициентов (6) существует асимптотически эквивалентная треугольная система Лаппо-Данилевского (2).

Пусть $B=(b_{ij})$, $i,j=1,2$. Обозначим

$$\beta_{11}(t)=\exp\left(\int_s^t b_{11}(\sigma)d\sigma\right), \ \beta_{22}(t)=\exp\left(\int_s^t b_{22}(\sigma)d\sigma\right),$$

$$I(t)=\exp\left(\int_s^t b_{12}(\tau)\exp\left(\int_s^\tau(\beta_{22}(\sigma)-\beta_{11}(\sigma))d\sigma\right)d\tau\right).$$

Фундаментальная нормированная при $t=s$ матрица решений такой системы (2) имеет вид: $Y(t)=(y_{ij}(t))$, $i,j=1,2$, где

$$y_{11}(t)=\beta_{11}(t), \ y_{12}(t)=\beta_{11}(t)\cdot I(t), \ y_{21}(t)=0, \ y_{22}(t)=\beta_{22}(t).$$

Для асимптотической эквивалентности рассматриваемых систем необходимо и достаточно (см., напр., [2]) существование такой постоянной невырожденной матрицы C, что матрица

$$L(t)=X(t)CY^{-1}(t) \qquad (7)$$

является матрицей Ляпунова. Пусть $L(t)=(l_{ij}(t))$, $C=(c_{ij})$, $i,j=1,2$. Тогда

$$l_{11}(t)=\left(2sc_{11}+c_{21}(t^2-s^2)\right)\Big/\left(2s\beta_{11}(t)\right), \qquad (8)$$

$$l_{21}(t)=c_{21}t\Big/\left(s\beta_{11}(t)\right), \qquad (9)$$

$$l_{12}(t)=\left(\left(2sc_{12}+c_{22}(t^2-s^2)\right)-\left(2sc_{11}+c_{21}(t^2-s^2)\right)I(t)\right)\Big/\left(2s\beta_{22}(t)\right), \qquad (10)$$

$$l_{22}(t)=\left(c_{22}-c_{21}I(t)\right)t\Big/\left(s\beta_{22}(t)\right). \qquad (11)$$

Кроме того, $\det L(t)=\det X(t)\cdot\det C\cdot\det Y(t)=t\det C\Big/\left(s\beta_{11}(t)\beta_{22}(t)\right)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $c_{21}\neq 0$. В этом случае

$$l_{11}(t)=\left(2sc_{11}+c_{21}(t^2-s^2)\right)l_{21}(t)\,/\,(2tc_{21}),$$

$$\det L(t)=\det C\cdot l_{21}(t)\Big/\left(c_{21}\beta_{22}(t)\right). \qquad (12)$$

Так как l_{11} – ограниченная функция, то $l_{21}(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ и поэтому из (9) следует, что

$$\int_s^t b_{11}(\sigma)d\sigma \to +\infty \text{ при } t\to+\infty. \qquad (13)$$

Кроме того, так как $|\det L(t)| \geq \alpha > 0$, $\forall t\geq s$, то из (12) следует

$$\int_s^t b_{22}(\sigma)d\sigma \to -\infty \text{ при } t\to+\infty. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) получаем

$$\int_s^t \big(b_{22}(\sigma)-b_{11}(\sigma)\big)d\sigma \to -\infty \text{ при } t\to+\infty. \qquad (15)$$

Так как система (2) – система Лаппо-Данилевского, т.е. выполнено условие (3), то существует такое $T_1\geq s$, что

$$b_{12}(t)\int_{T_1}^t \big(b_{22}(\sigma)-b_{11}(\sigma)\big)d\sigma = \big(b_{22}(t)-b_{11}(t)\big)\int_{T_1}^t b_{12}(\sigma)d\sigma,\ \forall t\geq T_1. \qquad (16)$$

Из (15) следует существование такого числа $T\geq T_1$, что

$$\int_{T_1}^t \big(b_{22}(\sigma)-b_{11}(\sigma)\big)d\sigma \neq 0,\ \forall t\in]T,+\infty[. \qquad (17)$$

Поэтому, в силу леммы, из условий (16) и (17) следует существование такого числа c_0, что

$$b_{12}(t) = c_0\big(b_{22}(t)-b_{11}(t)\big),\quad \forall t\geq T. \qquad (18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I(t) &= I(T) + \int_T^t \Big(c_0\big(b_{22}(\tau)-b_{11}(\tau)\big)\beta_{22}(\tau)/\beta_{11}(\tau)\Big)d\tau = \\ &= I(t) + c_0\beta_{22}(t)/\beta_{11}(t) - c_0\beta_{22}(T)/\beta_{11}(t). \end{aligned} \qquad (19)$$

Из (9) и (11) получаем

$$l_{22}(t) = \Big(c_{22} - c_{21}\big(I(T) - c_0\beta_{22}(T)/\beta_{11}(T)\big)\Big)t\Big/\big(s\beta_{22}(t)\big) - c_0 l_{21}(t).$$

Таким образом, для ограниченности l_{22} необходимо выполнение равенства

$$c_{22} = c_{21}\big(I(T) - c_0\beta_{22}(T)/\beta_{11}(T)\big). \qquad (20)$$

Кроме того, из (8) и (10) с учетом (20) получаем

$$l_{12}(t) = \Big(c_{12} - c_{11}\big(I(T) - c_0\beta_{22}(T)/\beta_{11}(T)\big)\Big)\Big/\beta_{22}(t) - c_0 l_{11}(t).$$

Таким образом для ограниченности l_{12} необходимо выполнение равенства

$$c_{12} = c_{11}\big(I(T) - c_0\beta_{22}(T)/\beta_{11}(T)\big). \qquad (21)$$

Однако полученные равенства (20) и (21) влекут $\det C = 0$, что противоречит невырожденности матрицы C. Таким образом, при $c_{21}\neq 0$ никакая треугольная система Лаппо-Данилевского не может быть асимптотически эквивалентна системе (1) с матрицей коэффициентов (6).

2. Пусть теперь $c_{21}=0$. В этом случае из (8)–(11) получаем

$$\begin{aligned} l_{11}(t) &= c_{11}/\beta_{11}(t), \\ l_{21}(t) &= 0, \\ l_{12}(t) &= \big(2sc_{12} + c_{22}(t^2-s^2) - 2sc_{11}I(t)\big)\Big/\big(2s\beta_{22}(t)\big), \\ l_{22}(t) &= c_{22}t\Big/\big(s\beta_{22}(t)\big). \end{aligned} \qquad (22)$$

Поскольку $c_{22}\neq 0$ (иначе $\det C = 0$), то ограниченность l_{22} влечет

$$\int_s^t b_{22}(\sigma)d\sigma \to +\infty \text{ при } t\to+\infty, \tag{23}$$

а ограниченность l_{11} влечет существование такого $M>0$, что

$$-\int_s^t b_{11}(\sigma)d\sigma \le M,\ \forall t>s. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что

$$\int_s^t \left(b_{22}(\sigma)-b_{11}(\sigma)\right)d\sigma \to +\infty \text{ при } t\to+\infty.$$

Таким образом, как и в случае $c_{21}\neq 0$, имеет место (для констант сохранены обозначения предыдущего случая) условие (18), а следовательно, и соотношение (19). В силу (22) имеем

$$l_{12}(t)=\left(c_{12}+c_{22}(t^2-s^2)/(2s)-c_{11}I(T)+c_{11}c_0\beta_{22}(T)/\beta_{11}(T)\right)/\beta_{22}(t)-c_0 l_{11}(t).$$

Из ограниченности l_{11}, l_{12} и отделенности от нуля $\det L(t)$ следует, что $c_{22}=0$. Но тогда $\det C=0$, что противоречит невырожденности матрицы C.

Таким образом, мы показали, что не существует невырожденной матрицы C, для которой матрица (7) являлась бы матрицей Ляпунова, т.е. имеет место

Теорема 1. *Существует такая линейная дифференциальная система (1) размерности $n=2$, для которой ни одна треугольная система Лаппо-Данилевского (2) не является асимптотически эквивалентной.*

В силу [4] любая функционально коммутативная 2×2 матрица имеет вид

$$F(t) = f(t)A+g(t)E,$$

где A – постоянная 2×2 матрица, E – единичная 2×2 матрица, f и g –скалярные действительные функции. (В [4] этот результат получен для комплекснозначных функций, однако, используя те же рассуждения, нетрудно доказать его справедливость и для действительных функций и матриц.)

Очевидно, что если $F(t)$ – функционально коммутативная матрица, то для любой невырожденной постоянной матрицы S матрица $S^{-1}F(t)S$ также будет функционально коммутативной.

Если собственные числа матрицы A – действительны, то существует невырожденная действительная матрица S такая, что $S^{-1}AS=A_0$, где A_0 – треугольная действительная матрица. Следовательно, система

$$dx/dt = F(t)x \tag{25}$$

с помощью преобразования Ляпунова $x=Sy$ приводится к системе

$$dy/dt=(f(t)A_0+g(t)E)y$$

с треугольной действительной функционально коммутативной матрицей коэффициентов.

Если же матрица A имеет комплексные собственные числа, то (см., напр., [5, с.257]) существует такая невырожденная постоянная матрица S, что $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ -\mu & \lambda\end{pmatrix}$, где λ и μ – действительные числа, $\mu\neq 0$. Поэтому система (25) с помощью преобразования Ляпунова $x=Sy$ приводится к системе

$$dy/dt=\begin{pmatrix}\lambda f(t)+g(t) & \mu f(t)\\ -\mu f(t) & \lambda f(t)+g(t)\end{pmatrix}y. \tag{26}$$

Легко видеть, что фундаментальная нормированная при $t=s$ матрица решений системы (26) имеет вид

$$Y(t)=\exp\left(V\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)\cdot\exp\left(E\int_s^t(\lambda f(\tau)+g(\tau))d\tau\right),$$

где $V=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$L(t)=\exp\left(V\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right) & \sin\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)\\ -\sin\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right) & \cos\left(\int_s^t \mu f(\tau)d\tau\right)\end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Таким образом, $Y(t)=L(t)Z(t)$, где $Z(t)$ – фундаментальная нормированная при $t=s$ матрица решений системы

$$dz/dt=(\lambda f(t)+g(t))Ez. \qquad (28)$$

Из (27) следует, что $L(t)$ – ортогональная матрица с ограниченной на $[s,+\infty[$ производной, поэтому система (26) асимптотически эквивалентна диагональной системе (28) с функционально коммутативной матрицей коэффициентов.

Итак, мы показали, что любая система (25) с функционально коммутативной матрицей коэффициентов приводима к треугольной системе с функционально коммутативной матрицей коэффициентов. Следовательно, если бы для системы (1) существовала асимптотически эквивалентная система (25), то для (1) существовала бы и треугольная асимптотически эквивалентная система с функционально коммутативной матрицей коэффициентов. Поэтому, в силу теоремы 1, имеет место

Теорема 2. *Существует такая линейная дифференциальная система, которая не приводима с помощью преобразования Ляпунова ни к одной системе с функционально коммутативной матрицей коэффициентов.*

1. Богданов Ю.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1969. №1. С.10.
2. Он же. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №6. С.707.
3. Мазаник С.А. // Там же. 1981. Т.17. №5. С. 923.
4. Морозов В.В. // Уч. зап. КГУ. Математика и механика. 1952. Т.112. Кн.9. С.17.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.

Поступила в редакцию 15.11.96.

УДК 517.944

А.Г.АЛЕХНО

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА С КОЭФФИЦИЕНТОМ, ИМЕЮЩИМ ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОНЕЧНОЕ КОЛЕБАНИЕ АРГУМЕНТА

It is constructed general solution for Riemann boundary value problem with a coefficient discontinuous of the second kind.

Пусть L – вещественная ось, D^+ – верхняя, D^- – нижняя полуплоскости. Исследована краевая задача Римана, состоящая в отыскании функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических соответственно в областях $D^{\pm}$, непрерывные граничные значения которых удовлетворяют соотношению

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L. \qquad (1)$$

Заданные функции $G(t)$ и $g(t)$ подчинены условиям:

1) $G(t)=\exp\{\varphi(t)\exp(i\psi(t)t\}$, $\varphi(t)\in H$, $\varphi(\infty)=\lambda\neq 0$, $\psi(t)=\nu+\alpha(t)(t+i)^{-1}$, $\nu\in R\setminus\{0\}$, $\alpha(t)\in H$, $\alpha(\infty)=0$, (2)