Математика и информатика

УДК 517.9

В.Н.ГОРБУЗОВ, П.Б.ПАВЛЮЧИК

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

The test of stability of singular points of multidimentional differential equation on the base of particular integral are obtained.

Рассмотрим многомерное дифференциальное уравнение

$$dx = P(x)\,dt, \tag{1}$$

когда матрица $P(x) = \|P_{ij}(x)\|$ имеет размер n×m, а ее элементами являются полиномы $P_{ij}{:}\,\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, в предположении, что оно вполне интегрируемо [1,2]. Устойчивость решений уравнения (1) будем исследовать, исходя из [3,4], не используя иные возможности, указанные в [2, с.160].

Для решений $x = x(t)$ уравнение (1) при $t_j = t_{0j}$, $j = \overline{1,m}$, $j \neq k$, $t_{0k} < t_k$ методом, аналогичным приведенному, скажем, при доказательстве теоремы 7.5.4 в [5, с.248] на случай одномерной системы, доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) голоморфная функция $B(x)$ положительно определена в проколотой окрестности $\dot{U}$ точки $O(0)$ пространства $\mathbb{R}^n$ и $B(0)=0$;

2) существует $k \in \{1,\ldots,m\}$ такое, что у открытого множества $\{x{:}\, V_k(x) > 0,\ \ \forall x \in \dot{U}\}$, где

$$V_k(x) = P_k(x)\nabla B(x),\ P_k(x) = \mathrm{colon}\,\{P_{1k}(x),\ldots,P_{nk}(x)\},$$

имеется непустая линейно связанная компонента L, на границе $\Gamma(L)$ которой расположена точка O.

Тогда нулевое решение $x=0$ вполне интегрируемого уравнения (1) неустойчиво.

Из уравнения (1) выделим обыкновенную дифференциальную систему

$$dx = P_k(x)\,dt_k,\ k \in \{1,\ldots,m\}. \tag{2k}$$

Предположим, что система (2k) имеет частный полиномиальный интеграл $w{:}\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такой, что O есть изолированная точка многообразия $w(x)=0$. Допустим для определенности, что в достаточно малой проколотой окрестности $\dot{U}$ точки $O(0)$ полином w положительно определен, т.е. $w(x) > 0$, $\forall x \in \dot{U}$. Тогда в соответствии с определением частного интеграла системы (2k) совместно тождество

$$P_k(x)\ \nabla w(x) \equiv w(x) M_k(x),\ \forall x \in \mathrm{R}^n, \qquad (3)$$

на основании которого и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для вполне интегрируемого уравнения (1) выполняются условия:

1) существует $k \in \{1,...,m\}$ такое, что система ($2k$) имеет частный полиномиальный интеграл w: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$;

2) точка $O(0)$ является изолированной точкой многообразия $w(x)=0$;

3) полином w положительно определен в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ точки O;

4) у открытого множества $\{x$: $M_k(x) > 0$, $\forall x \in \dot{U}\ \}$, где M_k определяется из тождества (3), имеется непустая линейно связная компонента L_k, на границе $\Gamma(L_k)$ которой расположена точка O.

Тогда состояние равновесия O уравнения (1) неустойчиво.

Например, вполне игнтегрируемая система уравнений в полных дифференциалах [1, с.49]

$$dx_1 = (-x_1^2 + x_2^2)dt_1 - 2x_1x_2dt_2,\ dx_2 = -2x_1x_2dt_1 + (x_1^2 - x_2^2)dt_2$$

имеет частный автономный полиномиальный интеграл $w(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Он же является частным интегралом обыкновенной дифференциальной системы

$$dx_1 = (-x_1^2 + x_2^2)dt_1,\ dx_2 = -2x_1x_2dt_1,$$

причем в тождестве вида (3) функция $M_1(x_1, x_2) = -2x_1$. Поэтому, в силу теоремы 2, состояние равновесия O (0,0) неустойчиво.

По аналогичной причине неустойчиво состояние равновесия $O(0,0,0)$ вполне интегрируемой системы [1, с.48]

$$dx_1 = (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dt_1 - 2x_1x_2dt_2,$$

$$dx_2 = -2x_1x_2dt_1 + (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)dt_2,$$

$$dx_3 = -2x_1x_3dt_1 - 2x_2x_3dt_2,$$

определяемое частным интегралом $w(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Рассматривая последовательно решение $x=x(t)$ уравнения (1) при $t_{01}<t_1$, $t_j = t_{0j}$, $j=\overline{2,m}$; $t_{02}<t_2$, $t_j=\mathrm{const}$, $j=\overline{1,m}$, $j\neq 2$; и т.д. до $t_{0m}<t_m$, $t_j=\mathrm{const}$, $j=\overline{1,m-1}$, включительно, на основании теоремы 2, а также используя методы доказательства теорем 7.5.1 и 7.5.2 из [5, с.245–247], получаем следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть для вполне интегрируемого уравнения (1) выполняются условия:

1) каждая из систем ($2k$), $k=\overline{1,m}$, имеет частный полиномиальный интеграл w_k:$\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ соответственно;

2) точка $O(0)$ является изолированной точкой для каждого многообразия $w_k(x)=0$, $k=\overline{1,m}$;

3) каждый из полиномов w_k, $k=\overline{1,m}$, положительно определен в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ точки O;

4) функции M_k, $k=\overline{1,m}$, определяются из тождеств

$$P_k(x)\nabla w_k(x) \equiv w_k(x) M_k(x),\ \forall x \in \mathrm{R}^n,\ k=\overline{1,m}.$$

Тогда если

а) существует $\xi\in\{1,...,m\}$ такое, что у открытого множества $\{x: M_\xi(x)>0, \forall x\in \dot{U}\}$ имеется непустая линейно связная компонента L_ξ, на границе $\Gamma(L_\xi)$ которой расположена точка O, то состояние равновесия O уравнения (1) неустойчиво;

б) все функции M_k, $k=\overline{1,m}$, являются знакоотрицательными в некоторой проколотой окрестности точки O, то состояние равновесия O уравнения (1) устойчиво;

в) все функции M_k, $k=\overline{1,m}$, являются определенно-отрицательными в некоторой окрестности точки O, то состояние равновесия O уравнения (1) асимптотически устойчиво.

1. Амелькин В.В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1985.
2. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.
3. Боже Д.А., Мышкис А.Д. // Латв. мат. ежегодник. 1966. Вып.2. С.43.
4. Они же // Там же. С.59.
5. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.

Поступила в редакцию 25.04.96.

УДК 519.10

В.А.ЕМЕЛИЧЕВ, Д.П.ПОДКОПАЕВ

ОБ УСЛОВИЯХ КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ НА СИСТЕМЕ ПОДМНОЖЕСТВ*

We investigate such type of stability of Pareto set in a multicriteria trajectorial (on a system of subsets of a finite set) problem, that imply preservation of all the efficient (Pareto-optimal) trajectories under "small" independent perturbations of the vector criterion parameters. The components of the vector criterion (partial criteria) belong to a broad class of functions and may specifically be well-known partial criteria MINSUM, MINMAX and MINMIN.

В [1,2] (см. также [3]) показано, что совпадение множества Парето с множеством Смейла является необходимым и достаточным условием квазиустойчивости множества Парето векторной (многокритериальной) задачи целочисленного линейного программирования. В случае произвольной комбинации критериев вида MINSUM (линейный), MINMAX (узкого места) и MINMIN это совпадение оказывается лишь достаточным, а при наличии в векторном критерии хотя бы одного линейного критерия (MINSUM) – и необходимым условием квазиустойчивости множества Парето векторной траекторной задачи [4].

В настоящей статье последний результат обобщается на широкий класс функций, являющихся частными критериями.

Пусть $m>1$, $C=\{c_1,c_2,...,c_m\}$ – некоторое множество, каждому элементу которого c_j приписаны веса $w_i(c_j)=a_{ij}$, $i\in N_n=\{1,2,...,n\}$, причем $A=\{a_{ij}\}_{n\times m}\in \mathbf{R}^{nm}$. Через $\mathbf{a}^i$ будем обозначать i-ую строку матрицы A.

Пусть $T=\{t\}$ – система непустых подмножеств множества C, называемых траекториями. Будем предполагать в дальнейшем, что $|T|>1$.

Пусть для каждого $i\in N_n$ на множестве траекторий T и множестве векторов $\mathbf{R}^m$ определена вещественная функция $f_i(t,\mathbf{x})=f_i(t,x_1,x_2,...,x_m)$. Тем самым задана вектор-функция (векторный критерий)

$$f(t,A)=(f_1(t,\mathbf{a}^1),f_2(t,\mathbf{a}^2),...,f_n(t,\mathbf{a}^n)):\ T\times \mathbf{R}^{nm}\to\mathbf{R}^n,$$

* Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант №Ф95-70) и Международной соросовской программой образования в области точных наук (гранты "Соросовский профессор" и "Соросовский аспирант").