

3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1967. С.73.
4. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Юферова И. В. // Дифф. уравнения. 1995. №12. С.2080.
5. Лазакович Н. В. // Вести АН Беларуси. 1996. №2. С.22.

Поступила в редакцию 09.10.1996.

УДК 519.872

М.А.МАТАЛЫЦКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК В ОДНОЙ ИЗ СИСТЕМ СЕТИ

The steady-state probabilities of closed queueing networks with an arbitrary message servicing in one system are obtained.

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания (СМО), которая состоит из $n-1$ однолинейных СМО $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ с экспоненциальным обслуживанием со средними $\mu_i^{-1}, i = 1, n-1$. В системе S_n обслуживание предполагается произвольным с функцией распределения (ф.р.) времени обслуживания заявок $B_n(t)$. Дисциплины обслуживания в системах сети — FIFO. В [1] доказано следующее утверждение: пусть $G(t)$ — ф.р. времени ожидания в однолинейной СМО, тогда вероятность того, что по истечении времени η обслуживание заявки еще не будет завершено, равна

$\varphi(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} [1 - G(t)] dt / \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt$. Из данного утверждения следует, что если заявка находится на обслуживании в системе S_n , то ф.р. времени, оставшегося до конца ее обслуживания, определяется по формуле

$$B_n^1(\eta) = \mu_n \int_0^{\eta} [1 - B_n(\tau)] d\tau, \quad (1)$$

где μ_n — интенсивность обслуживания заявок в системе S_n . Пусть $k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$, где $k_i(t)$ — число заявок в i -й СМО в момент времени t , p_{ni} — вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_n в систему S_i , $\sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} = 1$. Пусть $P(k)$ — вероятность состояния k в стационарном режиме, $P^1(k)$ — вероятность состояния k в сети в любой момент времени, непосредственно следующий после перехода некоторой заявки из одной СМО в другую.

Будем считать, что выполняется следующее предположение [2]: если сеть открыта, распределение состояния сети $P^1(k)$, учитывающего только остальные заявки (кроме той, которая переходит из одной СМО в другую), совпадает со стационарным по времени распределением $P(k)$, если сеть замкнута, то распределение состояния сети, учитывающего только остальные заявки, совпадает со стационарным по времени распределением состояния сети с уменьшенным на единицу количеством заявок. Из него следует, что для замкнутых сетей $P^1(k) = P(k)$.

Теорема. Справедливо следующее соотношение:

$$P(k) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \int_0^{\infty} P(k(\theta + \eta - 0) + I_n - I_i / k_0) [1 - B_n(\eta)] d\eta, \quad (2)$$

где I_i — вектор размерности n с нулевыми компонентами, за исключением i -й компоненты, которая равна 1; η — время между моментами выхода заявки из системы S_n и моментом последнего перехода некоторой заявки из одной СМО в другую, который произошел непосредственно перед ним,

этот момент обозначен через θ , $k(\theta)=k_0$, вероятность $P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)$ совпадает с вероятностью состояний экспоненциальной сети с $\mu_n=0$.

Доказательство. Поскольку $k(\theta+\eta+0)=k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i$, то по формуле полной вероятности имеем

$$P(k(\theta+\eta+0)/k_0) = \sum_{i=1}^{n-1} P_{k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i, k(\theta+\eta+0)} P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0),$$

где $P_{k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i, k(\theta+\eta+0)}$ есть вероятность перехода сети из состояния $k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i$ в состояние $k(\theta+\eta-0)$ (вероятность перехода заявки после завершения обслуживания из системы S_n в систему S_i), т.е. равна p_{ni} . Вероятность $P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)$ совпадает с вероятностью состояний экспоненциальной сети с $\mu_n=0$, поскольку за время $(\eta-0)$ обслуживание заявки в системе S_n не завершится. Применяя опять формулу полной вероятности, получаем

$$P(k(\theta+\eta+0)) = \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0).$$

Усредняя это соотношение по η с учетом (1), будем иметь

$$P(k(\theta+0)) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \int_0^\infty P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0) d \int_0^\eta [1-B_n(\tau)] d\tau,$$

откуда следует (2).

В [3] разработан метод последовательных приближений для нахождения вероятностей состояний марковских сетей в любой момент времени t . Его можно использовать при получении приближенных соотношений для вероятностей $P(k)$. Пусть $P_m(k)$ — приближение для $P(k)$, полученное на m -й итерации. Используя для m -го приближения вероятности $P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)$ указанный метод [3] при $\mu_n=0$ и при условии $k(\theta)=k_0$, получим

$$P_m(k) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \sum_{j=0}^\infty a_{mj}(k+I_n-I_i/k_0, \mu_n=0) \int_0^\infty \eta^j [1-B_n(\eta)] d\eta.$$

Нахождение величин $a_{mj}(k+I_n-I_i/k_0, \mu_n=0)$ рекуррентным образом подробно описано в [3]. Поскольку

$$\int_0^\infty \eta^j [1-B_n(\eta)] d\eta = \frac{1}{j+1} \int_0^\infty \eta^{j+1} dB_n(\eta) = \frac{m_{j+1}}{j+1},$$

где m_j — j -й начальный момент случайной величины с ф.р. $B_n(\eta)$, то последнее соотношение принимает вид

$$P_m(k) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \sum_{j=0}^\infty a_{mj}(k+I_n-I_i/k_0, \mu_n=0) \frac{m_{j+1}}{j+1}. \quad (3)$$

Рассмотренные примеры показали, что выражение (3) является хорошим приближением для стационарных вероятностей состояний $P(k)$ уже при небольших значениях m .

1. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., 1963.
2. Sevcic K., Mitranic I. // J. of ACM. 1981. V.28. №2. P.232.
3. Маталыцкий М. А. // Автоматика и телемеханика. 1996. №9. С.79.

Поступила в редакцию 25.01.97.