$N''_{\max} = 2n$, $N''_{\mathrm{mid}} = 3n/2$, т.е. по скорости сходимости алгоритм (2) занимает промежуточное положение. Распространяя его на случай вращения трехмерного вектора $R(x_0,y_0,z_0)$, получим рекуррентные соотношения для составляющих x_i,y_i,z_i:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & \alpha_i C_i & B_i \\ -\alpha_i B_i & A_i & 0 \\ -\beta_i C_i & -\alpha_i\beta_i D_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь α_i и β_i – операторы поворота; $A_i = 1-K_i 2^{-2i}$; $B_i = 2^{-i}$; $C_i = 2^{-i}-K_i 2^{-3i}$; $D_i = 2^{-2i}$; $K_i = 2^{2i} - 2^i\sqrt{2^{2i}-1}$; $i = \overline{1,n}$.

Для выполнения алгоритма (4) необходимо $5(n+1)$ операций сдвига и $5(n+1)$ операций суммирования. Это в 1,6 раза меньше числа операций, что требуется при выполнении алгоритма [1].

На ЭВМ было проведено исследование точностных характеристик алгоритмов применительно к вычислению модулей векторов $R(x_0,y_0)$ и $R(x_0,y_0,z_0)$. Эксперименты для различных значений их составляющих выявили существенные точностные преимущества способов кругового вращения векторов по отношению к способам их псевдовращения. Так, для алгоритма [2] относительная погрешность вычисления модуля вектора $R(x_0,y_0)$ с проекциями $x_0=4$, $y_0=3$ составила на 16-й итерации 10^{-8}, а для алгоритмов [1] и (2) – 10^{-10}, 10^{-9}. Однако по затратам оборудования методы кругового вращения сложнее методов псевдовращения. Эффективна их реализация в виде специализированных БИС- или СБИС-процессоров, например, на базовых матричных кристаллах, которые могут быть использованы в качестве сопроцессоров к серийно выпускаемым микропроцессорам или арифметических устройств для специализированных ЭВМ и цифровых процессоров сигналов. Для повышения помехозащищенности и отказоустойчивости специализированных процессоров целесообразно применять модулярные системы счисления. Эти системы позволяют обнаруживать и исправлять ошибки как при хранении и передаче числовой информации, так и при ее обработке. Производительность соответствующих процессоров составляет 10^7 операций в секунду при обеспечении получения функциональных значений с частотой 50 МГц [3].

1. Lebedev V., Oransky A. // Proc. SPIE. 1993. V.1976. P.336.
2. Volder J.E. // IRE Trans. Electron. Comput. 1959. V.EC-8(3). P.330.
3. Высокоскоростные методы и системы цифровой обработки информации // А.Ф.Чернявский, В.В.Данилевич, А.А.Коляда, М.Ю.Селянинов. Мн., 1996.

Поступила в редакцию 05.03.96.

УДК 517.9

И.В.КАШНИКОВА

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО РЕШЕНИЯМИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ

The approximation of solution of stochastic differential equation in Ito's form is considered.

На основе аппарата алгебр обобщенных случайных процессов в статье [1] предложена методика аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. В данной работе с помощью этой методики исследуется вопрос аппроксимации решения стохастического дифференциального уравнения вида:

$$X(t,w)=x_0+(I)\int_0^t f\big(s,X(s,w)\big)dB(s,w)+\int_0^t g\big(s,X(s,w)\big)ds,\quad x_0\in R, \quad (1)$$

где $f(s,u)\in C_B^2(R^2)$, $g(s,u)\in C_B^1(R^2)$, а стохастический интеграл понимается в смысле Ито. (Доказательство существования и единственности решения уравнения (1) см., напр., в [2, с. 271].)

Пусть

$$B_n(t,w)=\int_0^{1/n} B(t+u,w)\rho_n(u)du\,,\; f_n(t,x)=\int_0^{1/n}\int_0^{1/n} f(t+u,x+v)\rho_n(u,v)dudv,$$

$$g_n(t,x)=\int_0^{1/n}\int_0^{1/n} g(t+u,x+v)\rho_n(u,v)dudv,$$

где $\rho_n(u)$, $\rho_n(u,v)$ – стандартные "шапочки" [3].

Рассмотрим $0=t_0<t_1<...<t_m=a$ – разбиение отрезка $T=[0,a]$. Без ограничения общности будем считать, что $t_k-t_{k-1}=h_n$, $k=1,...,m$.

Решение уравнения (1) будем аппроксимировать решением конечно-разностного уравнения с осреднением:

$$\begin{cases} X_n(t+h_n,w)-X_n(t,w)=f_n(t,X_n(t,w))[B_n(t+h_n,w)-B_n(t,w)]+g_n(t,X_n(t,w))h_n, \\ X_n\,/\,[0,h_n]=X_{0n}(t,w). \end{cases} \quad (2)$$

Подобные исследования проводились в работах [4], [5] и оказалось, что существенную роль играет зависимость между h_n и $1/n$. Для решения стохастического дифференциального уравнения вида:

$$X(t,w)=x_0+(I)\int_0^t f(X(s,w))dB(s,w)+\int_0^t g(s,w)ds$$

и решения соответствующего конечно-разностного уравнения аппроксимация достигается при $1/n=o(h_n^2)$. В данной работе такая оценка получена для более широкого класса уравнений.

Теорема 1. Пусть $Y_n(t,w)$ – решение конечно-разностного уравнения с запаздыванием:

$$\begin{cases} Y_n(t+h_n,w)-Y_n(t,w)=f_n(t-h_n,Y_n(t-h_n,w))[B_n(t+h_n,w)-B_n(t,w)]+g_n(t,Y_n(t,w))h_n, \\ Y_n\,/\,[-h_n,h_n]=X_{0n}(t,w), \end{cases} \quad (3)$$

тогда справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t\in T} E\left|X(t,w)-Y_n(t,w)\right|^2\le c\sup_{t\in[-h_n,h_n]} E\left|x_0-X_{0n(}(t,w)\right|^2+ch_n+c/(nh_n)\,,$$

где $X(t,w)$ – решение стохастического дифференциального уравнения (1).

Теорема 2. Если $X_n(t,w)$, $Y_n(t,w)$ – решения задач (2) и (3) соответственно, то

$$\sup_{t\in T} E\left|X_n(t,w)-Y_n(t,w)\right|^2\le ch_n+c/(nh_n^2).$$

Следствие. Пусть $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n=o(h_n^2)$ и $\sup\limits_{t\in]-h_n,h_n[} E\left|x-X_{0n}(t,w)\right|^2\to 0$, тогда решение конечно-разностного уравнения (2) аппроксимирует решение стохастического дифференциального уравнения (1), т.е.

$$\sup_{t\in T} E\left|X(t,w)-X_n(t,w)\right|^2\to 0\,.$$

1. Лазакович Н.В. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т.39. №3. С.20.
2. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1967. С.73.
4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Юферева И.В. // Дифф. уравнения. 1995. №12. С.2080.
5. Лазакович Н.В. // Вести АН Беларуси. 1996. №2. С.22.

Поступила в редакцию 09.10.1996.

УДК 519.872

М.А.МАТАЛЫЦКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК В ОДНОЙ ИЗ СИСТЕМ СЕТИ

The steady-state probabilities of closed queueing networks with an arbitrary message servicing in one system are obtained.

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания (СМО), которая состоит из n-1 однолинейных СМО $S_1,S_2,...,S_{n-1}$ с экспоненциальным обслуживанием со средними $\mu_i^{-1}, i=\overline{1,n-1}$. В системе S_n обслуживание предполагается произвольным с функцией распределения (ф.р.) времени обслуживания заявок $B_n(t)$. Дисциплины обслуживания в системах сети – FIFO. В [1] доказано следующее утверждение: пусть $G(t)$ – ф.р. времени ожидания в однолинейной СМО, тогда вероятность того, что по истечении времени η обслуживание заявки еще не будет завершено, равна $\varphi(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\infty}[1-G(t)]dt \Big/ \int\limits_{0}^{\infty}[1-G(t)]dt$. Из данного утверждения следует, что если заявка находится на обслуживании в системе S_n, то ф.р. времени, оставшегося до конца ее обслуживания, определяется по формуле

$$B_n^1(\eta)=\mu_n\int\limits_0^{\eta}[1-B_n(\tau)]d\tau, \tag{1}$$

где μ_n – интенсивность обслуживания заявок в системе S_n. Пусть $k(t)$= $=(k_1(t),k_2(t),...,k_n(t))$, где $k_i(t)$ – число заявок в i-й СМО в момент времени t, p_{ni} – вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_n в систему S_i, $\sum\limits_{i=1}^{n-1}p_{ni}=1$. Пусть $P(k)$ – вероятность состояния k в стационарном режиме, $P^1(k)$ – вероятность состояния k в сети в любой момент времени, непосредственно следующий после перехода некоторой заявки из одной СМО в другую.

Будем считать, что выполняется следующее предположение [2]: если сеть открыта, распределение состояния сети $P^1(k)$, учитывающего только остальные заявки (кроме той, которая переходит из одной СМО в другую), совпадает со стационарным по времени распределением $P(k)$, если сеть замкнута, то распределение состояния сети, учитывающего только остальные заявки, совпадает со стационарным по времени распределением состояния сети с уменьшенным на единицу количеством заявок. Из него следует, что для замкнутых сетей $P^1(k)=P(k)$.

Теорема. Справедливо следующее соотношение:

$$P(k)=\mu_n\sum_{k_0}P(k_0)\sum_{i=1}^{n-1}p_{ni}\int\limits_0^{\infty}P(k(0+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)[1-B_n(\eta)]d\eta, \tag{2}$$

где I_i – вектор размерности n с нулевыми компонентами, за исключением i-й компоненты, которая равна 1; η – время между моментами выхода заявки из системы S_n и моментом последнего перехода некоторой заявки из одной СМО в другую, который произошел непосредственно перед ним,