Данные таблиц свидетельствуют о преимуществе алгоритма (6)–(8) с точки зрения устойчивости.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. М., 1977.
3. Kharin Yu.S., Fursa R.A. // Proc. of the Inter. conference CDAM'95. V.1. 1995. P.47.
4. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. М., 1984.

Поступила в редакцию 24.09.96.

УДК 517.977

Е.А.РУЖИЦКАЯ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ И ПРОИЗВОДНЫМ

Stabilization of linear dynamic systems in inertial controls class presenting continuous functions with bounded derivatives is described. An auxiliary of optimal control is used for dynamic systems stabilization. The article proves that the optimal feedback auxiliary problem serves as stabilizing feedback for dynamic systems. Stabilization algorithm based on real time construction of positional solutions of optimal control auxiliary problem is described. The result are illustrated by examples dynamic system stabilization of the fourth order.

Введение

Проблема стабилизации является одной из центральных проблем теории управления. В классической теории управления стабилизация динамических систем осуществлялась линейными обратными связями, структура которых задавалась заранее, и при этом не накладывались ограничения на значения управляющих воздействий [1–3]. С возникновением теории оптимального управления появилась возможность не только не задавать заранее структуру обратной связи, но и учитывать ограничения на значения управляющих воздействий [4].

В реальных задачах используются ограниченные управления, которые могут менять свои значения лишь с ограниченной (иногда очень большой) скоростью. В данной работе подобные управления применяются для стабилизации динамических систем. Задача построения стабилизирующих обратных связей решается методами оптимального управления. В работе на примере стабилизации динамической системы четвертого порядка показывается, что для реализации обратных связей можно построить стабилизатор, эффективно решающий проблему стабилизации ограниченными управлениями с ограниченными производными.

Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1}$$

где $x=x(t)$ — n-вектор состояния системы в момент времени t, $u=u(t)$ — значение управляющего воздействия, $A\in R^{n\times n}$, $b\in R^n$, — постоянные матрица и вектор, такие что $\operatorname{rank}(b,Ab,\dots,A^{n-1}b)=n$.

Выберем числа $h>0$, $0<L<\infty$, $0<L_1<\infty$. Функцию $u(t)$, $t\geq 0$, назовем программным управлением, если она: 1) непрерывна; 2) кусочно-линейна: $u(t)=u(\tau)+v(\tau)(t-\tau)$, $t\in[\tau,\tau+h]$, $\tau=kh$, $k=0,1,2,\dots$; 3) ограничена: $|u(t)|\leq L$, $t\geq 0$; 4) имеет ограниченную производную: $|v(t)|\leq L_1$, $t\geq 0$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему управления вида:

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1}, \quad \dot{x}_{n+1} = v. \tag{2}$$

Функцию $v(t)$, $t\geq 0$, назовем программным управлением для системы (2), если она: 1) кусочно-постоянна: $v(t)=v_k$, $t\in[\tau,\tau+h[$, $\tau=kh$, $k=0,1,2,\dots$; 2) соответствующая ей компонента $x_{n+1}(t)$ траектории системы (2) удовлетворяет неравенству: $|x_{n+1}(t)|\leq L$, $t\geq 0$; 3) $|v(t)|\leq L_1$, $t\geq 0$.

Пусть G — некоторая окрестность состояния равновесия $x=0$ системы (1).

Функцию $v(x,x_{n+1})$, $x\in G$, $|x_{n+1}|\le L$, назовем стабилизирующей обратной связью, если: 1) $v(0,0)=0$, $v(x,x_{n+1})\le L_1$, $x\in G$, $|x_{n+1}|\le L$; 2) реализация $v(x(t),x_{n+1}(t))$, $t\ge 0$, вдоль каждой траектории $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t\ge 0$, замкнутой системы

$$\dot{x}=Ax+bx_{n+1},\quad \dot{x}_{n+1}=v(x,x_{n+1}),\quad x(0)\in G,\quad |x_{n+1}(0)|\le L, \tag{3}$$

является программным управлением; 3) траектория $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t\ge 0$, системы (3) на промежутке $[kh,(k+1)h[$, $k=0,1,2,\ldots$ совпадает с решением системы (2) при $v(t)=v(x(kh),x_{n+1}(kh))$; 4) система (3) асимптотически устойчива в $G\times[-L,L]$.

Из определения стабилизирующей обратной связи следует, что в процессе управления достаточно знать лишь значения $v(t)=v(x(t),x_{n+1}(t))$, $t\ge 0$, вдоль стабилизируемой траектории $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t\ge 0$.

Устройство, которое при выбранном h способно в режиме реального времени в процессе стабилизации вычислять функции $v(kh)=v(x(kh),x_{n+1}(kh))$, $k=0,1,2,\ldots$, назовем дискретным стабилизатором. Для построения стабилизирующей обратной связи привлекается задача оптимального управления.

Вспомогательная задача оптимального управления

Выберем натуральное число $N>0$, $n<N<\infty$, и рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления:

$$B(z,z_{n+1})=\min\int_0^{Nh}|x_{n+1}(t)|dt, \tag{4}$$

$$\dot{x}=Ax+bx_{n+1},\quad \dot{x}_{n+1}=v,\quad x(0)=z,\quad x_{n+1}(0)=z_{n+1}, \tag{5}$$

$$x(Nh)=0,\quad x_{n+1}(Nh)=0, \tag{6}$$

$$|x_{n+1}(t)|\le L, \tag{7}$$

$$|v(t)|\le L_1,\quad t\in[0,Nh]. \tag{8}$$

Будем предполагать, что для задачи (4)–(8) выполняется условие

$$\operatorname{rank}(b,Db,\ldots D^{n-1}b)=n,\ (D=\exp Ah). \tag{9}$$

Функцию $v^0(kh|z,z_{n+1})$, $k=\overline{0,N}$, удовлетворяющую ограничению (8), назовем оптимальным программным управлением задачи (4)–(8), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t|z),x^0_{n+1}(t|z_{n+1}),t\in[0,Nh]$, системы (5) выполняются ограничения (6), (7) и критерий качества (4) достигает минимального значения.

Обозначим через G — множество таких векторов $z\in R^n$, при которых задача (4)–(8) имеет решение для начальных условий $z\in G$, $|z_{n+1}|\le L$.

Функцию $v^0(z,z_{n+1})=v^0(0|z,z_{n+1})$, $z\in G$, $|z_{n+1}(t)\le L|$, будем называть оптимальным стартовым управлением типа обратной связи.

Стабилизирующая обратная связь

Покажем, что функция

$$v(x,x_{n+1})=v^0(x,x_{n+1}),\ x\in G,\ |x_{n+1}|\le L, \tag{10}$$

является стабилизирующей обратной связью.

Из задачи (4)–(8) следует, что $v^0(0,0)=0$, каждая реализация $v(t)=v^0(x(t),x_{n+1}(t))$, $t\ge 0$, вдоль траектории $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t\ge 0$, системы (3) является программным управлением.

Методом функций Ляпунова [5,6] покажем, что обратная связь (10) является стабилизирующей. В качестве функции Ляпунова рассмотрим оптимальное значение критерия качества $B(z,z_{n+1})$ вспомогательной задачи (4)–(8). Ясно, что $B(z,z_{n+1})$ — непрерывная функция, $B(0,0)=0$, $B(z,z_{n+1})>0$, при $z\neq 0$, $z_{n+1}\neq 0$.

Рассмотрим замкнутую систему (3) с обратной связью (10) и обозначим через $x(\tau)$, $x_{n+1}(\tau)$, ее состояние в произвольный текущий момент $\tau=kv$, соответствующее произвольному начальному состоянию $x(0)=z$, $x_{n+1}(0)=z_{n+1}$,

$z\in G$, $|z_{n+1}|\leq L$. Функция Ляпунова $B(z,z_{n+1})$ на состоянии $x(\tau)$, $x_{n+1}(\tau)$, принимает значение $B(x(\tau),x_{n+1}(\tau))$.

Задача (4)–(8) эквивалентна следующей задаче кусочно-линейного программирования:

$$B(z,z_{n+1})=\min\sum_{j=0}^{N-1}\left|\sum_{i=0}^{j}v_ih+z_{n+1}\right|,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}g_jv_j=-F(Nh)z-F^1(Nh)z_{n+1},\quad \sum_{j=0}^{N-1}v_jh=-z_{n+1},\tag{11}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{k}v_jh+z_{n+1}\right|\leq L,\quad k=\overline{0,N-1},\quad |v_j|\leq L_1,\quad j=\overline{0,N-1},$$

где $g_j\int_{jh}^{(j+1)h}F^1(Nh-t)dt$, $F(t)\in R^{n\times n}$, $t\geq 0$, — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x}=Ax$, матрица $F^1(t)\in R^{n\times 1}$, $t\geq 0$, является блочной компонентой фундаментальной матрицы $\overline{F}(t)\in R^{(n+1)\times(n+1)}$, $t\leq 0$, решений расширенной системы $\dot{x}=Ax+bx_{n+1}$, $\dot{x}_{n+1}=0$:

$$\overline{F}=\begin{pmatrix}F & F^1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

($0\in R^{1\times n}$ — нулевая матрица), v_j — значение управления $v(t)$ на промежутке $[jh,(j+1)h[$, $j=\overline{0,N-1}$.

Обозначим: $v^0(\tau)=(v_j^0,j=\overline{0,N-1}))$ — оптимальный план, $K^0(\tau,I_{оп},J_{оп})$ — оптимальная опора [7] задачи (11), $I_{оп}\subset I=\{1,2,...,n,n+1,n+2,...,n+1+N\}$ — множество индексов опорных строк, $J_{оп}\subset J=\{1,...,N\}$ — множество индексов опорных столбцов, $|I_{оп}|=|I_{оп}|$.

Под действием управления $v(\tau)=v^0(x(\tau),x_{n+1}(\tau))$ система (5) в момент $\tau+h$ окажется в состоянии $(x(\tau+h),x_{n+1}(\tau+h))$. Управление $v(jh)=v^0((j+1)h|x(\tau),x_{n+1}(\tau))$, $j=\overline{0,N-2}$, $v((N-1)h)=0$ является допустимым для задачи (11) с начальным условием $(z=x(\tau+h),\ z_{n+1}=x_{n+1}(\tau+h))$. Критерий качества

$$B(x(\tau+h),x_{n+1}(\tau+h))=\sum_{j=1}^{N-1}\left|\sum_{i=0}^{j}v_i^0h+x_{n+1}(\tau)\right|\leq\sum_{j=1}^{N-1}\left|\sum_{i=0}^{j}v_i^0h+x_{n+1}(\tau)\right|=B(x(\tau),x_{n+1}(\tau)).$$

Значит, и на оптимальном управлении $v^0(kh)$, $k=\overline{0,N-1}$, выполнится неравенство: $B(x(\tau+h),x_{n+1}(\tau+h))\leq B(x(\tau),x_{n+1}(\tau))$.

Покажем, что равенства

$$B(x(\tau),x_{n+1}(\tau))=B(x(\tau+h),x_{n+1}(\tau+h))=...=B(x(\tau+Nh),x_{n+1}(\tau+Nh))\tag{12}$$

могут выполняться не более, чем в течение N шагов.

Пусть равенства (12) выполняются в течение N шагов. Для получения оптимального управления $v^0(x(\tau+Nh),x_{n+1}(\tau+Nh))$ в момент $\tau+Nh$ стабилизатор решает задачу (4)–(8) с $z=x(\tau+Nh)$, $z_{n+1}=x_{n+1}(\tau+Nh)$. Эта задача эквивалентна следующей задаче кусочно-линейного программирования:

$$B(z,z_{n+1})=\min\sum_{j=0}^{2N-1}\left|\sum_{i=0}^{j}v_ih+z_{n+1}\right|,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}g_jv_j+\sum_{j=N}^{2N-1}g_jv_j=-F(Nh)z-F^1(Nh)z_{n+1},\tag{13}$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1}v_jh=-z_{n+1},\quad\left|\sum_{j=0}^{k}v_jh+z_{n+1}\right|\leq L,\quad k=\overline{0,2N-1},$$

$$v^0(\tau+jh|z,z_{n+1})\leq v_j\leq v^0(\tau+jh|z,z_{n+1}),\quad j=\overline{0,N-1},\quad |v_j|\leq L_1,\quad j=\overline{N,2N-1}.$$

Задачу (13) сведем к эквивалентной задаче линейного программирования и будем решать двойственным методом [7]. Начальную опору задачи (13) построим по оптимальной опоре $K^0(\tau, I_{оп}, J_{оп})$ следующим образом: заменим во множестве индексов $J_{оп}$ индексы $\{0,...,N-1\}$ на индексы $\{N,...,2N-1\}$. В этом случае опорный план будет невырожденным. Среди оценок Δ_j, $j=\overline{N,2N-1}$ обязательно найдутся ненулевые, так как тождество $\Delta_N=...=\Delta_{2N-1}=0$ противоречит предположению (9). Поэтому на оптимальном плане задачи (13) выполнится неравенство:

$$B(x(\tau+Nh),\ x_{n+1}(\tau+Nh))<B(x(\tau),\ x_{n+1}(\tau)).$$

Таким образом, последовательность $\{B(x(kh),x_{n+1}(kh))\}\to 0$ при $k=0,1,2,...$ Отсюда легко показать, что $\|x(t)\|\to 0$, $|x_{n+1}|\to 0$ при $t\to\infty$. Этим завершается доказательство стабилизирующего свойства обратной связи (10).

Алгоритм работы стабилизатора

Согласно определению, стабилизатор в момент времени $\tau=kh$ должен знать значение $v^0(kh|x(kh),x_{n+1}(kh))$ оптимального программного управления задачи (4)–(8) для состояния $z=x(kh)$, $z_{n+1}=x_{n+1}(kh)$. Эта задача эквивалентна задаче (11). В момент $\tau+h$ для выработки управления $v(\tau+h)$ стабилизатор должен знать решение задачи (4)–(8) при $z=x((k+1)h)$, $z_{n+1}=$ $=x_{n+1}((k+1)h)$.

Задача (11) в различные моменты времени τ и $\tau+h$, как и эквивалентная ей задача линейного программирования, отличается лишь векторами правых частей, и это отличие тем меньше, чем меньше h. Согласно теории линейного программирования [8], наиболее эффективным методом решения задачи (11) является двойственный метод, так как он позволяет за небольшое количество итераций построить оптимальную опору задачи (11) в момент времени $\tau+h$, если в качестве начальной опоры взята оптимальная опора задачи (11) в момент времени τ. Итерации двойственного метода на современных вычислительных машинах осуществляются за небольшое время. Если время, затраченное конкретным вычислительным устройством на построение новой опоры по старой опоре, меньше чем h, то можно говорить, что для данной задачи с помощью данного вычислительного устройства можно реализовать стабилизирующую обратную связь в режиме реального времени [9,10].

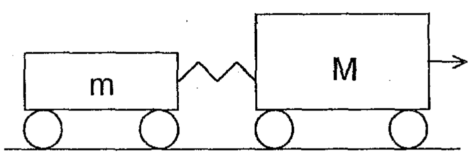

Рис.1.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации ограниченными инерционными управлениями двух материальных точек, соединенных упругой связью (рис.1).

Пусть поведение такой системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -9x_1+9x_3,\quad \dot{x}_3 = x_4,\quad \dot{x}_4 = 3x_1-3x_3+u,\quad \dot{u}=v \qquad (14)$$

$(x_1,x_2,x_3,x_4,u\in R)$, где x_1,x_3 — отклонение первой и второй точек системы от состояний равновесия $x_1=x_3=0$; x_2,x_4 — скорости этих точек; u — управляющее воздействие; v — скорость изменения управляющего воздействия.

В качестве вспомогательной задачи рассмотрим задачу перевода двух материальных точек из произвольного состояния в состояние равновесия $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, $u=0$ с минимальным расходом топлива.

Пусть в начальный момент $t=0$ рассматриваемая система находилась в состоянии $x_1(0)=0{,}1$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0{,}1$, $x_4(0)=0$, $u(0)=0$. Требуется перевести ее в момент Nh в состояние

$$x_1(Nh)=0,\ x_2(Nh)=0,\ x_3(Nh)=0,\ x_4(Nh)=0,\ u(Nh)=0. \qquad (15)$$

При этом будем считать, что доступные управления представляют непрерывные кусочно-линейные функции $u(t)$, $t\geq 0$, с периодом квантования h, удовлетворяющие ограничениям

$$|u(t)| \le L, \quad |\dot{u}(t)| \le L_1, \quad t \ge 0. \qquad (16)$$

Качество допустимых управлений будем оценивать по значению функционала

$$\int_0^{Nh} |u(t)| dt \to \min. \qquad (17)$$

При решении задачи были выбраны следующие значения параметров: L=1, L_1=3. Приведем результаты вычислений.

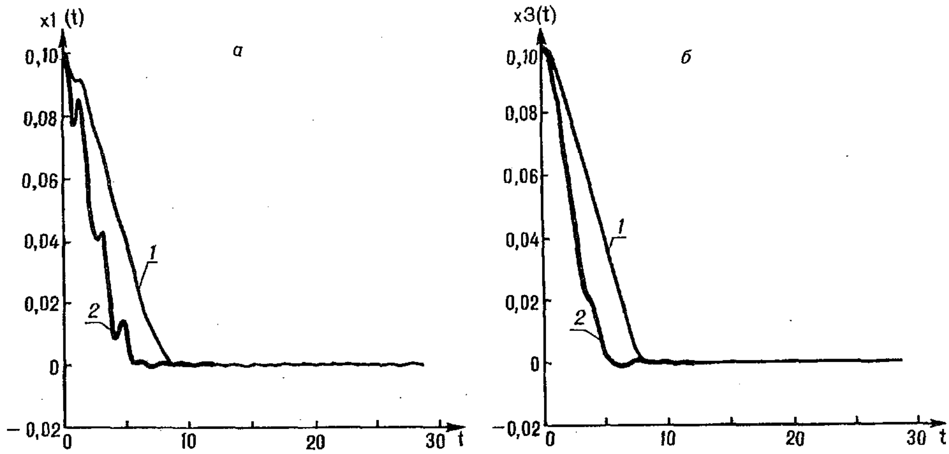

Рис.2.

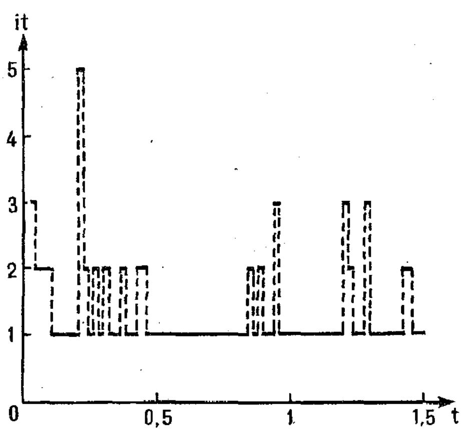

Рис.3.

На рис.2 представлены изменения первой и третьей координаты системы (14) по времени при фиксированном значении N=20 и различных значениях h. Кривая *1* соответствует h=0,25, кривая *2* — h=0,15. Процесс стабилизации останавливали в момент τ^* при выполнении условия $\|x(\tau^*), x_{n+1}(\tau^*)\| \le 10^{-3}\|x_0, u_0\|$. При этом фиксировали момент τ_0, при котором $\|x(\tau_0), x_{n+1}(\tau_0)\| \le 10^{-2}\|x_0, u_0\|$. Для h=0,25 — τ^*=28,8, τ_0=9,44; для h=0,15 — τ^*=11,64, τ_0=6,9.

На рис.3 представлены данные о количестве итераций двойственного метода для решения вспомогательной задачи линейного программирования в каждый момент времени $\tau = kh$, k=1,2,... при h=0,15, N=20.

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
2. Цянь Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., 1956.
3. Механика СССР за 50 лет. Теория оптимальных управляемых систем (Н.Н.Красовский). М., 1968.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. №3. С.67.
5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
6. Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного импульсного регулятора. М., 1967.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1: Линейные системы. Мн, 1984.
8. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., 1966.
9. Gabasov R., Kirillova F.M. // 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, June30–Jule5. San Francisco. 1996. V.D. P.231.
10. Gabasov R., Kirillova F.M., Prischepova S.V. Optimal Feedback Control: Lecture Notes in Control and Information Sciences. London, 1995. V.207.

Поступила в редакцию 09.10.96.