

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНКИ ХЬЮБЕРА

The method of forecasting of time series with trend, that uses a Huber estimator, is presented. This method is investigated on robustness under distortions—"outliers". The comparison of the presented method and the classical OLS-method of forecasting in terms of robustness is given.

Введение

Задача статистического прогнозирования временных рядов является одной из важнейших в статистическом анализе данных и актуальна для различных областей человеческой деятельности: физики, биологии, социологии, медицины, экономики и т.д. К настоящему времени существует набор методов оптимального прогнозирования для так называемых "классических" моделей временных рядов — моделей, не подверженных искажениям [1,2]. Однако на практике анализируемые временные ряды зачастую содержат искажения различного типа. Поэтому одним из основных направлений в статистическом прогнозировании временных рядов является анализ устойчивости имеющихся методов прогнозирования и построение новых методов, устойчивых к искажениям разных типов [3].

В этой статье рассмотрен метод прогнозирования временных рядов с трендом с использованием оценки Хьюбера и проведено его исследование на устойчивость при наличии искажений типа "выбросов", а также дано сравнение этого метода и классического МНК-метода прогнозирования с точки зрения устойчивости.

Модель временного ряда с трендом при наличии "выбросов"

Модель временного ряда с трендом при наличии "выбросов" может быть записана следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} y_t &= f(t, \theta^0) + u_t, \\ x_t &= y_t + \xi_t v_t, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ — дискретное время, T — длина наблюдаемого временного ряда, $\{u_t\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$, $\{v_t\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону $N(0, K\sigma^2)$, $K > 1$, $\{\xi_t\}$, $\xi_t \in \{0, 1\}$ — последовательность независимых случайных величин Бернулли:

$$P\{\xi_t = 1\} = \varepsilon, \quad P\{\xi_t = 0\} = 1 - \varepsilon,$$

$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+$ — вероятность появления "выброса" в момент времени t (уровень искажений), $\varepsilon_+ < 1$ — известный максимальный уровень искажений, $f(t, \theta^0)$ — функция тренда временного ряда, $\theta^0 = (\theta_j^0) \in R^m$ — неизвестный m -вектор параметров модели (1), x_t — наблюдаемое значение временного ряда в момент времени t . Последовательности $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, $\{\xi_t\}$ предполагаются взаимно независимыми.

Для модели (1) будем полагать, что функция тренда $f(t, \theta^0)$ может быть записана в виде разложения

$$f(t, \theta^0) = (\theta^0)' \psi(t) = \sum_{j=1}^m \theta_j^0 \psi_j(t) \quad (2)$$

по m линейно независимым функциям $\{\psi_j(t)\}$, где штрих означает транспонирование.

Меры устойчивости прогнозирования

Для проведения исследования устойчивости прогнозирования будем использовать следующие меры устойчивости [3]:

— риск прогнозирования, равный среднеквадратической ошибке прогноза на глубину τ :

$$r_{\varepsilon}(T, \tau) = E\left\{\left(\hat{y}_{T+\tau} - y_{T+\tau}\right)^2\right\}; \quad (3)$$

— гарантированный риск прогнозирования:

$$r_+(T, \tau) = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+} r_{\varepsilon}(T, \tau); \quad (4)$$

— коэффициент неустойчивости риска:

$$\kappa(T, \tau) = \frac{r_+(T, \tau) - r_0}{r_0}, \quad (5)$$

где $r_0 = r_0(T, \tau) > 0$ — риск прогнозирования в случае отсутствия искажений.

Метод прогнозирования с использованием оценки Хьюбера и его устойчивость к искажениям типа "выбросов"

Опишем метод прогнозирования временных рядов с трендом с использованием оценки Хьюбера [4]:

$$\hat{y}_{T+\tau} = f(T + \tau, \hat{\theta}), \quad (6)$$

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{i=1}^T \rho(x_i - \theta' \psi(i)), \quad (7)$$

$$\varphi(z) = \rho'(z) = \max\{-L, \min\{L, z\}\}, \quad (8)$$

где $\hat{\theta}$ — оценка вектора параметров θ^0 , τ — глубина прогноза, $\hat{y}_{T+\tau}$ — прогноз. Величина L определяется как корень следующего уравнения:

$$\frac{\sqrt{2}e^{-L^2/2}}{\sqrt{\pi}L} - 2\Phi(-L) = \varepsilon(1 - \varepsilon), \quad (9)$$

$\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения.

Введем следующие обозначения: $(T \times m)$ -матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \dots & \psi_m(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_m(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(T) & \psi_2(T) & \dots & \psi_m(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(1) \\ \psi'(2) \\ \dots \\ \psi'(T) \end{pmatrix},$$

$(T \times T)$ -матрица $H = \Psi(\Psi' \Psi)^{-1} \Psi'$, h — максимальный диагональный элемент матрицы H .

Теорема. Если прогнозируемый временной ряд удовлетворяет модели (1), (2) и выполнены следующие условия: $c_1)$ $T > m$; $c_2)$ $|\Psi' \Psi| \neq 0$; $c_3)$ имеет место асимптотика: $hm^2 \rightarrow 0$, то для риска прогнозирования (3) метода (6)–(8) верно следующее асимптотическое разложение:

$$r_{\varepsilon}(T, \tau) = \sigma^2 + \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} \psi'(T + \tau) (\Psi' \Psi)^{-1} \psi(T + \tau) + o_1, \quad (10)$$

где

$$A(\varepsilon) = \frac{L^2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi} - \Gamma\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{2\sigma^2}{L^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2}\right) \right) + \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \left(L^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{L^2}{2(1+K)\sigma^2}\right) \right) + \right.$$

$$+ 2\sigma^2 \left((1+K) \Gamma \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{L^2}{2(1+K)\sigma^2} \right) - \Gamma \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2} \right) \right) \\ B(\varepsilon) = \left(2\Phi \left(\frac{L}{\sigma} \right) - 1 + 2\varepsilon \left(\Phi \left(\frac{L}{\sqrt{1+K}\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{L}{\sigma} \right) \right) \right)^2, \\ \Gamma(a, z_0, z_1) = \Gamma(a, z_0) - \Gamma(a, z_1),$$

$\Gamma(\cdot)$ — неполная гамма-функция, o_1 — остаточный член разложения более высокого порядка малости, чем главный член.

Доказательство проводится вычислением асимптотического разложения матрицы ковариаций оценки Хьюбера (7), (8), согласно [4], и последующей подстановкой полученного результата в формулу риска прогнозирования, полученную в [3].

Следствие. Если выполнены условия теоремы, то для коэффициента неустойчивости риска (5) метода (6)–(8) верно следующее асимптотическое разложение:

$$\kappa(T, \tau) = \sigma^2 + \frac{A(\varepsilon_+)B(0) - A(0)B(\varepsilon_+)}{A(0)B(\varepsilon_+)} \psi'(T + \tau)(\Psi'\Psi)^{-1}\psi(T + \tau) + o_2,$$

где o_2 — остаточный член разложения более высокого порядка малости, чем главный член.

Сравнение метода прогнозирования с использованием оценки Хьюбера и классического метода прогнозирования

Для сравнения методов прогнозирования с точки зрения устойчивости были рассмотрены временные ряды, удовлетворяющие модели (1)–(2):

1) **Временной ряд 1.** $T=15$, $m=3$, $(\theta^0)'=(1; 0,1; 0,01)$, $\psi'(t)=(1;t;t^2)$, $\sigma^2=0,09$, $K=50$;

2) **Временной ряд 2.** $T=15$, $m=3$, $(\theta^0)'=(1; 0,5; 0,6)$, $\psi'(t)=(1;\cos(t);\cos(2t))$, $\sigma^2=0,09$, $K=50$.

Для этих временных рядов вычислены величины риска прогнозирования метода с использованием оценки Хьюбера (10) и классического МНК-метода [3] при уровне искажений $\varepsilon \in \{0; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3\}$ и глубине прогноза $\tau = 1,5$. Результаты вычислений риска для временных рядов 1, 2, а также величины отношения $\Delta = r_{OLS}/r_{Huber}$, где r_{OLS} и r_{Huber} — риск прогнозирования для МНК-метода и метода с использованием оценки Хьюбера, приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

Глубина прогноза	Показатель	Уровень искажений				
		0,00	0,10	0,20	0,25	0,30
1	r_{OLS}	0,161	0,518	0,875	1,054	1,233
	r_{Huber}	0,162	0,201	0,247	0,274	0,307
	Δ	0,994	2,577	3,543	3,847	4,016
5	r_{OLS}	0,485	2,460	4,435	5,422	6,410
	r_{Huber}	0,489	0,704	0,956	1,110	1,290
	Δ	0,992	3,494	4,639	4,885	4,969

Таблица 2

Глубина прогноза	Показатель	Уровень искажений				
		0,00	0,10	0,20	0,25	0,30
1	r_{OLS}	0,116	0,248	0,380	0,446	0,512
	r_{Huber}	0,117	0,131	0,148	0,158	0,170
	Δ	0,991	1,893	2,568	2,823	3,012
5	r_{OLS}	0,103	0,168	0,233	0,265	0,297
	r_{Huber}	0,103	0,110	0,118	0,123	0,129
	Δ	1,000	1,527	1,975	2,154	2,302

Данные таблиц свидетельствуют о преимуществе алгоритма (6)–(8) с точки зрения устойчивости.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. М., 1977.
3. Kharin Yu. S., Fursa R. A. // Proc. of the Inter. conference CDAM'95. V.1. 1995. P.47.
4. Хьюбер П. Дж. Робастность в статистике. М., 1984.

Поступила в редакцию 24.09.96.

УДК 517.977

Е.А.РУЖИЦКАЯ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ И ПРОИЗВОДНЫМ

Stabilization of linear dynamic systems in inertial controls class presenting continuous functions with bounded derivatives is described. An auxiliary of optimal control is used for dynamic systems stabilization. The article proves that the optimal feedback auxiliary problem serves as stabilizing feedback for dynamic systems. Stabilization algorithm based on real time construction of positional solutions of optimal control auxiliary problem is described. The result are illustrated by examples dynamic system stabilization of the fourth order.

Введение

Проблема стабилизации является одной из центральных проблем теории управления. В классической теории управления стабилизация динамических систем осуществлялась линейными обратными связями, структура которых задавалась заранее, и при этом не накладывались ограничения на значения управляющих воздействий [1–3]. С возникновением теории оптимального управления появилась возможность не только не задавать заранее структуру обратной связи, но и учитывать ограничения на значения управляющих воздействий [4].

В реальных задачах используются ограниченные управления, которые могут менять свои значения лишь с ограниченной (иногда очень большой) скоростью. В данной работе подобные управления применяются для стабилизации динамических систем. Задача построения стабилизирующих обратных связей решается методами оптимального управления. В работе на примере стабилизации динамической системы четвертого порядка показывается, что для реализации обратных связей можно построить стабилизатор, эффективно решающий проблему стабилизации ограниченными управлениями с ограниченными производными.

Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — n -вектор состояния системы в момент времени t , $u = u(t)$ — значение управляющего воздействия, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, — постоянные матрица и вектор, такие что $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n$.

Выберем числа $h > 0$, $0 < L < \infty$, $0 < L_1 < \infty$. Функцию $u(t)$, $t \geq 0$, назовем программным управлением, если она: 1) непрерывна; 2) кусочно-линейна: $u(t) = u(\tau) + v(\tau)(t - \tau)$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$; 3) ограничена: $|u(t)| \leq L$, $t \geq 0$; 4) имеет ограниченную производную: $|v(t)| \leq L_1$, $t \geq 0$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему управления вида:

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1}, \quad \dot{x}_{n+1} = v. \quad (2)$$

Функцию $v(t)$, $t \geq 0$, назовем программным управлением для системы (2), если она: 1) кусочно-постоянна: $v(t) = v_k$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$; 2) соответствующая ей компонента $x_{n+1}(t)$ траектории системы (2) удовлетворяет неравенству: $|x_{n+1}(t)| \leq L$, $t \geq 0$; 3) $|v(t)| \leq L_1$, $t \geq 0$.

Пусть G — некоторая окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1).