Пусть теперь подформация $\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)$ дополняема в $\mathrm{lform}_p(G)$. Тогда в $\mathrm{lform}_p(G)$ найдется такая подформация Z, что $\mathrm{lform}_p(G) = \mathrm{form}((\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \cup Z)$, $(\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \cup Z = (1)$.

По лемме 1,

$$\pi(\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \cap \pi\ (Z) = \varnothing.$$

Следовательно,

$$\alpha(\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \cap \alpha\ (Z) = \varnothing.$$

Применяя лемму 2, имеем

$$\mathrm{lform}_p(G) = \mathrm{form}((\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \cup Z) =$$
$$= (\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \times Z \subseteq (\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \times (\Delta_{p'} \cap \mathrm{lform}_p(G)).$$

Обратное включение очевидно. Итак,

$$\mathrm{lform}_p(G) = (\Delta_p \cap \mathrm{lform}_p(G)) \times (\Delta_{p'} \cap \mathrm{lform}_p(G)).$$

Теорема доказана.

Следствие [7,8]. Тогда и только тогда насыщенная формация нильпотентна, когда в ней дополняемы все подформации вида Δ_p.

1. D'Arcy P. On formations on finite groups. Arch. Math. Basel, 1974. V.25. P.3.
2. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т.39. №3. С.17.
3. Скиба А.Н. // Мат. заметки. 1980. Т.27. №3. С.345.
4. Он же // Вопр. алгебры. 1987. №3. С.21.
5. Huppert B., Blackburn N. Finite groups II. Berlin; Heidelberg; New York, 1982.
6. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. 1989.
7. Ведерников В.А. // Международная математическая конференция, посвященная 25-летию Гомельского госуниверситета им.Ф.Скорины: Тез. докл. Гомель, 1994. Ч.1. С.26.
8. Скиба А.Н. // Изв. вузов. Математика. 1994. №10. С.1.

Поступила в редакцию 18.09.96.

УДК 517.925.6

Т.С.СТЕПАНОВА

О НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

In this work for solutions of the special nonlinear second-order systems of differential equations the necessary and sufficient conditions are obtained for the case when the movable critical singularities are absent.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = R(t,x,y), \\ \dot{y} = Q(t,x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $R = \sum_{j=0}^{l} p_j(t,x) y^j$, $Q = \sum_{j=0}^{m} q_j(t,y) x^j$, (2)

$p_j(t,x)$ $(j=\overline{0,l})$ и $q_j(t,y)$ $(j=\overline{0,m})$ – функции, рациональные по x и y соответственно и аналитические по t.

Найдем необходимые условия отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (1), т.е. условия принадлежности данной системы к системам P-типа.

Предположим, что функция R имеет полюс порядка k относительно x, Q – полюс порядка n относительно y. Тогда в окрестности полюсов имеем:

$$R(t,x,y) = \frac{R_1(t,x,y)}{[x-a(t)]^k}, \quad Q(t,x,y) = \frac{Q_1(t,x,y)}{[y-b(t)]^n}, \quad k,n \in N, \tag{3}$$

где R_1, Q_1 – функции, аналитические по t, x и y.

Введем параметр λ следующим образом:

$$x = a(t) + \lambda^{n+1} X, \quad y = b(t) + \lambda^{k+1} Y, \quad t = t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)} T. \tag{4}$$

Тогда система (1) с учетом (3) и (4) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} = \dfrac{R_1(t_0+\lambda^{(n+1)(k+1)}T, a(t_0+\lambda^{(n+1)(k+1)}T)+\lambda^{n+1}X, b(..)+\lambda^{k+1}Y)}{X^k} - \\ \quad - a'(t_0+\lambda^{(n+1)(k+1)}T)\lambda^{k(n+1)}, \\ \dfrac{dY}{dT} = \dfrac{Q_1(t_0+\lambda^{(n+1)(k+1)}T, a(..)+\lambda^{n+1}X, b(..)+\lambda^{k+1}Y)}{Y^n} - \\ \quad - b'(t_0+\lambda^{(n+1)(k+1)}T)\lambda^{n(k+1)}, \end{cases} \tag{5}$$

где a', b' – производные функций a и b по t.

Положив в (5) $\lambda=0$, получим упрощенную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} = \dfrac{R_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{X^k}, \\ \dfrac{dY}{dT} = \dfrac{Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{Y^n}. \end{cases} \tag{6}$$

Откуда

$$\begin{aligned} X &= \sqrt[k+1]{(k+1)R_1(t_0, a(t_0), b(t_0))T + C_1}, \\ Y &= \sqrt[n+1]{(n+1)Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0))T + C_2}, \end{aligned} \tag{7}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Функции X и Y не будут иметь подвижных многозначных особых точек только при $k=n=0$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была системой без подвижных многозначных особых точек, необходимо, чтобы функции $p_j(t,x)$ $(j=\overline{0,l})$ и $q_j(t,y)$ $(j=\overline{0,m})$ из (2) являлись полиномами по x и y соответственно.

Далее перейдем к рассмотрению системы (1) при $l=m=1$, т.е.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(t,x) + yQ(t,x), \\ \dot{y} = R(t,y) + xS(t,y), \end{cases} \tag{8}$$

где P,Q,R,S – полиномы степеней m_1, m_2, n_1, n_2 по x и y соответственно. Пусть

$$\begin{aligned} P &= a_{m_1}(t)+\ldots+a_0(t)x^{m_1}, \quad Q = b_{m_2}(t)+\ldots+b_0(t)x^{m_2}, \\ R &= c_{n_1}(t)+\ldots+c_0(t)y^{n_1}, \quad S = d_{n_2}(t)+\ldots+d_0(t)y^{n_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим $m=\max\{m_1,m_2\}$, $n=\max\{n_1,n_2\}$. (10)

Справедлива следующая

Теорема 2. Для того, чтобы система (8) была системой P-типа, необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_2(t)+a_1(t)x+a_0(t)x^2+y(b_2(t)+b_1(t)x+b_0(t)x^2), \\ \dot{y} = c_2(t)+c_1(t)y+c_0(t)y^2+x(d_2(t)+d_1(t)y+d_0(t)y^2). \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство проведем при помощи метода малого параметра Пенлеве.

Перепишем систему (8), учитывая (9) и (10):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{j=0}^{m}\left[a_j(t)+b_j(t)y\right]x^{m-j}, \\ \dot{y} = \sum\limits_{j=0}^{n}\left[c_j(t)+d_j(t)x\right]y^{n-j}, \end{cases} \tag{12}$$

причем в системе (12) при $m_1 \neq m_2$, $n_1 \neq n_2$ для коэффициентов имеем следующие возможности:

а) если $m=m_1$, то $b_j=0$, $0 \le j \le m_1-m_2-1$,
б) если $m=m_2$, то $a_j=0$, $0 \le j \le m_2-m_1-1$,
в) если $n=n_1$, то $d_j=0$, $0 \le j \le n_1-n_2-1$,
г) если $n=n_2$, то $c_j=0$, $0 \le j \le n_2-n_1-1$.

Пусть

$$x=\frac{X}{\lambda^p},\ y=\frac{Y}{\lambda^q},\ t=t_0+\lambda^r T, \tag{13}$$

где целые неотрицательные числа p, q и r пока не определены.

Далее возможны следующие случаи:

1. $\boldsymbol{m=m_1}$, $\boldsymbol{n=n_1}$. Тогда система (12) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dT}=a_0X^{m_1}\lambda^{r+p(1-m_1)}+\ldots+(a_{m_1-m_2}\lambda^q+b_{m_1-m_2}Y)X^{m_2}\lambda^{r+p(1-m_2)-q}+\ldots+(a_{m_1}\lambda^q+b_{m_1}Y)\lambda^{r+p-q},\\ \dfrac{dY}{dT}=c_0Y^{n_1}\lambda^{r+q(1-n_1)}+\ldots+(c_{n_1-n_2}\lambda^p+d_{n_1-n_2}X)Y^{n_2}\lambda^{r-p+q(1-n_2)}+\ldots+(c_{n_1}\lambda^p+d_{n_1}X)\lambda^{r-p+q}.\end{cases} \tag{14}$$

Возьмем $p=n_1-1$, $q=m_1-1$, $r=(m_1-1)(n_1-1)$ (считаем $m_1>1$, $n_1>1$).

Положив $\lambda=0$, получим упрощенную систему

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dT}=a_0(t_0)X^{m_1},\\ \dfrac{dY}{dT}=c_0(t_0)Y^{n_1}.\end{cases}$$

Отсюда, для того чтобы уравнения полученной системы были уравнениями P-типа, необходимо, чтобы $m_1\le 2$, $n_1\le 2$.

2. $\boldsymbol{m=m_1}$, $\boldsymbol{n=n_2}$. Положим числа $p=n_2-1$, $q=m_1-2$, $r=(n_2-1)(m_1-1)$ (считаем $m_1>1$, $n_2>1$). Тогда упрощенная система, соответствующая системе (12), запишется так

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dT}=a_0(t_0)X^{m_1},\\ \dfrac{dY}{dT}=d_0(t_0)XY^{n_2},\end{cases}\quad \text{для } m_1>2 \text{ и}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dT}=a_0(t_0)X^2,\\ \dfrac{dY}{dT}=X(d_0(t_0)Y^{n_2}+\ldots+d_{n_2}(t_0)),\end{cases}\quad \text{для } m_1=2.$$

Отсюда, очевидно, необходимо, чтобы $m_1\le 2$, $n_2\le 2$.

3. $\boldsymbol{m=m_2}$, $\boldsymbol{n=n_1}$. Этот случай сводится к случаю 2 перестановкой x и y.

4. $\boldsymbol{m=m_2}$, $\boldsymbol{n=n_2}$. (Здесь возможно $m_1=m_2$, $n_1=n_2$.) Возьмем $p=n_2-2$, $q=m_2-2$, $r=(m_2-1)(n_2-1)-1$, если $n_2>2$ и $m_2>2$, или $p=q=1$, $r=2$, если $m_2=n_2=2$. В этом случае упрощенная система примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dT}=b_0(t_0)YX^{m_2},\\ \dfrac{dY}{dT}=d_0(t_0)XY^{n_2}.\end{cases}$$

Исключив из системы переменную Y, находим ограничение $n_2\le 2$. Аналогично, исключая X, получаем $m_2\le 2$.

Для того чтобы доказательство теоремы было полным, остается рассмотреть случаи $m=\{0,1\}$, $n=\{0,1\}$.

а). Пусть $\boldsymbol{m=0}$, тогда система (12) примет вид

$$\begin{cases}\dot{x}=a_0(t)+b_0(t)y,\\ \dot{y}=\sum\limits_{j=0}^{n}\left[c_j(t)+d_j(t)x\right]y^{n-j}.\end{cases}$$

Исключив переменную y, получим уравнение

$$\ddot{x}=a_0'(t)+\frac{(\dot{x}-a_0(t))b_0'(t)}{b_0(t)}+b_0(t)\sum_{j=0}^{n}\left[c_j(t)+d_j(t)x\right]\left(\frac{\dot{x}-a_0(t)}{b_0(t)}\right)^{n-j},$$

отсюда необходимо, чтобы $n\leq 2$.

б). Пусть $\boldsymbol{m=1}$, тогда система (12) запишется так

$$\begin{cases}\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+(b_0(t)+b_1(t)x)y,\\ \dot{y}=\sum\limits_{j=0}^{n}\left[c_j(t)+d_j(t)x\right]y^{n-j}.\end{cases}$$

Исключая переменную y, находим условие на степень n: $n\leq 2$.

Случаи $\boldsymbol{n=0}$ и $\boldsymbol{n=1}$ сводятся к рассмотренным перестановкой x и y. В результате получаем $m\leq 2$.

Итак, теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы 2 можно провести, сведя систему (8) к одному уравнению второго порядка и воспользовавшись результатами Пенлеве [1].

Рассмотрим систему (11), исключив из нее переменную y, получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}=L(t,x)\dot{x}^2+N(t,x)\dot{x}+M(t,x), \tag{15}$$

где

$$L(t,x)=\frac{b_1(t)+c_0(t)+(2b_0(t)+d_0(t))x}{B(t,x)},$$

$$N(t,x)=a_1(t)+c_1(t)+\left(2a_0(t)+d_0(t)\right)x+\Big[b_2'(t)+b_1'(t)x+b_0'(t)x^2-$$
$$-\left(a_2(t)+a_1(t)x+a_0(t)x^2\right)\left(b_1(t)+c_0(t)+\left(2b_0(t)+d_0(t)\right)x\right)\Big]/B(t,x),$$

$$M(t,x)=a_2'(t)+a_1'(t)x+a_0'(t)x^2+\left(c_0(t)+d_2(t)x\right)\left(b_2(t)+b_1(t)x+b_0(t)x^2\right)-$$
$$-\left(c_1(t)+d_1(t)x\right)\left(a_2(t)+a_1(t)x+a_0(t)x^2\right)+\Big[\left(c_0(t)+d_0(t)x\right)\left(a_2(t)+a_1(t)x+a_0(t)x^2\right)^2-$$
$$-\left(b_2'(t)+b_1'(t)x+b_0'(t)x^2\right)\left(a_2(t)+a_1(t)x+a_0(t)x^2\right)\Big]/B(t,x).$$

$$B(t,x)=b_2(t)+b_1(t)x+b_0(t)x^2.$$

Для уравнения вида (15) необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек известны (см., напр., [2, с.426]).

Заметим, что из вида функции $L(t,x)$ следует, что шестое уравнение Пенлеве не входит в класс уравнений P-типа, описываемых уравнением (15), а следовательно, и системой (11).

Предположим, что эти необходимые и достаточные условия для уравнения (15) выполнены. Тогда и y-компонента решения системы (11) в качестве своих подвижных особых точек может иметь лишь полюсы, т.е. будет обладать P-свойством.

Заметим, что для уравнений Пенлеве P_2—P_5 построены эквивалентные системы вида (11) [3].

Таким образом, *если система (11) является системой P-типа, то она интегрируется либо в элементарных, либо в известных классических трансцендентных функциях, либо в функциях, являющихся решениями уравнений Пенлеве* P_2–P_5.

1. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
2. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
3. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн.; 1990.

Поступила в редакцию 02.04.96 .