Физика

УДК 530.12

А.В.ГРИНЧУК, Е.А.УШАКОВ

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

A new approach to the problem of wave propagation in curved space is proposed. The result is applied to construct Feynman propagator of vector field.

1. Решение волнового уравнения в пространстве Римана имеет как качественные, так и количественные отличия от решения в плоском пространстве. Только отчасти это объясняется изменением вида уравнения вследствие некоммутативности ковариантных производных для скалярного, спинорного и векторного полей соответственно: $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + m^2 \phi = 0$, $\nabla_\mu \nabla^\mu \psi - \frac{R}{4}\psi + m^2 \psi = 0$, $\nabla_\mu \nabla^\mu A^\alpha + R^\alpha_\beta A^\beta + m^2 A^\alpha = 0$ (здесь и далее сигнатура -2).

Действительно, в силу уравнений Эйнштейна в тех областях пространства-времени, где $R^\alpha_\beta \neq 0$, имеем также и $T^\alpha_\beta \neq 0$. Взаимодействие с источником энергии-импульса зачастую значительно превышает гравитационные эффекты. Поэтому имеет смысл ограничиться решением в областях с $T^\alpha_\beta = 0$. Тогда приведенные нами уравнения примут вид, схожий со случаем плоского пространства:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi + m^2 \Psi = 0, \tag{1}$$

где Ψ рассматривается как матрица-столбец. Традиционно [1] влияние гравитационного поля учитывается следующим образом. Уравнение (1) записывается в форме:

$$g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \nabla_\nu \Psi + \Gamma_\mu \nabla_\nu \Psi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda \Psi\right) + m^2 \Psi = 0, \tag{2}$$

здесь Γ_μ – квадратные матрицы, $\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \Gamma_\mu \Psi$ [2].

В искривленном пространстве принципиально невозможно избавиться в конечной области от дополнительных членов, пропорциональных $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \Gamma_\mu$.

Такая точка зрения имеет определенные недостатки. Во-первых, отсутствует явная ковариантность, во-вторых, трудно проследить непосредственное влияние кривизны на распространение волн.

2. Предлагаемый подход основан на некоторых свойствах параллельного переноса и методе вторичных волн [3]. Для упрощения промежуточных вычислений перейдем к нормальным римановым координатам $\{y^\alpha\}$ с началом в точке x^μ_0. Оператор параллельного переноса вдоль геодезической из точки y=0 в y^α с точностью до второго порядка имеет вид [4]:

$$\mathrm{P}(y,0) = 1 - y^{\hat\mu}\Gamma_{\hat\mu}(0) - \frac{1}{2} y^{\hat\mu} y^{\hat\nu}(\partial_{\hat\mu}\Gamma_{\hat\nu}(0) - \Gamma_{\hat\mu}(0)\Gamma_{\hat\nu}(0)) + \cdots \tag{3}$$

Можно легко проверить следующие соотношения:

$$\nabla_\mu \mathrm{P}(y,0) = O(y), \tag{4a}$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \mathrm{P} = g^{\hat\mu\hat\nu}\Big(\big(\partial_{\hat\mu}\partial_{\hat\nu} + (\Gamma_{\hat\mu}\partial_{\hat\nu} + \Gamma_{\hat\nu}\partial_{\hat\mu}) + \Gamma_{\hat\mu}\Gamma_{\hat\nu} + \partial_{\hat\nu}\Gamma_{\hat\mu}\big)\mathrm{P} - \Gamma^{\hat\alpha}_{\hat\mu\hat\nu}(\partial_{\hat\alpha} + \Gamma_{\hat\alpha})\mathrm{P}\Big) = O(y), \quad (4б)$$

откуда с учетом $\Gamma^{\alpha}_{\hat\mu\hat\nu} = O(y)$ следует, что подстановка $\Psi = \mathrm{P}(y,0)\Psi_0 \exp(-ik_{\hat\mu} y^\mu)$ в волновое уравнение даст результат:

$$(\nabla^2 + m^2)\tilde\Psi = (m^2 - g^{\hat\alpha\hat\beta}(0)k_{\hat\alpha}k_{\hat\beta})\tilde\Psi + O(y)O(\tilde\Psi), \quad (5)$$

т.е. $\tilde\Psi$ при $k^2=m^2$ является решением (1) с точностью до $O(y^3)$.

В методе вторичных волн используются фундаментальные решения, т.е. решения уравнения (1) с сингулярными начальными условиями:

$$\text{при } t = t' \quad \mathrm{K}(t,r;t',r') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{K}(t,r;t',r') = 1\delta_{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad (6a)$$

$$\mathrm{K}_0(t,r;t',r') = 1\delta_{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{K}_0(t,r;t',r') = 0. \quad (6б)$$

Решение (1) представляет собой суперпозицию вторичных волн, выражаемых посредством фундаментальных решений $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_0$:

$$\Psi(t,\boldsymbol{r}) = \int\left(\mathbf{K}(t,\boldsymbol{r};t',\boldsymbol{r}')\frac{\partial\Psi(t',\boldsymbol{r}')}{\partial t'} + \mathbf{K}_0(t,\boldsymbol{r};t',\boldsymbol{r}')\Psi(t',\boldsymbol{r}')\right)d^3r'. \quad (7)$$

Если x_0^μ – точка на начальной гиперповерхности Σ, то, направляя ось $y^{\hat 0}$ вдоль нормали к Σ, получим:

1) $$\mathrm{K}(x,x_0) = \mathrm{P}(x,x_0)\int\frac{\sin k_{\hat 0}y^{\hat 0}}{k_{\hat 0}}\exp(-k_{\hat i}y^{\hat i})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (8a)$$

$$\mathrm{K}_0(x,x_0) = \mathrm{P}(x,x_0)\int\cos k_{\hat 0}y^{\hat 0}\exp(-ik_{\hat i}y^{\hat i})\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (8б)$$

– решения (1) с точностью до $O(y^3)$, так как каждая из компонент Фурье-разложения ($\sim \mathrm{P}e^{-iky}$) удовлетворяет (5);

2) при $y^{\hat 0} = 0$ выполняются начальные условия вида (6).

Следовательно, формула (7) переходит в выражение:

$$\Psi(x') = \int_\Sigma\left(\mathrm{K}(x',x)\frac{D\Psi}{\partial\Sigma} + \mathrm{K}_0(x',x)\Psi\right)d^3\Sigma, \quad (9)$$

справедливое в малой окрестности Σ. Для спиноров предлагается рассматривать квадрированное уравнение Дирака, но нужно учитывать, что производная по нормали к гиперповерхности не является независимой величиной.

Как можно описать вторичные волны? Из (8*а*, 8*б*) следует, что амплитуды волн Ψ, $\frac{\partial\Psi}{\partial\Sigma}$ переносятся параллельно вдоль геодезических, выходящих из начальной точки x_0^μ. Фазы парциальных квазиплоских волн ($k_{\hat\mu}y^{\hat\mu}$ – в Римановых координатах) в произвольных координатах выражаются как $\int k_\mu dx^\mu$, где интегрирование ведется вдоль геодезической $\frac{D^2x^\mu}{ds^2} = 0$ при $\frac{Dk_\mu}{ds} = 0$ [6]. Естественно, наши построения справедливы только в малой окрестности x_0. При этом ограничении можно утверждать, что вторичные волны вида (8) дают физическую реализацию параллельного переноса. Хотя данное утверждение важно уже само по себе, оно не позволяет увидеть различие в поведении волн в искривленном и плоском пространствах. Действительно, в плоском пространстве единичная матрица является также и оператором параллельного переноса, причем не только в малой окрестности. Различие решений обусловлено изменением условий интерференции вторичных волн. При наличии кривизны результат параллельного переноса зависит от начальной и конечной точки и соединяющего их пути. Эта зависимость искажает интерференционную картину и может быть положена в основу описания взаимодействия поля с кривизной.

Например, анализ движения волнового пакета на основании фазовых сдвигов [8] приводит к выводу, что кривизна является источником дополнительного сдвига фаз между вторичными волнами, который компенсируется разностью хода. Это, в свою очередь, приводит к отклонению пакета от геодезической [9]:

$$\frac{Dp_\mu}{ds} = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} u^\nu \sigma^{\alpha\beta}, \tag{10}$$

где p_μ, $\sigma^{\alpha\beta}$ – средние значения импульса и спина. Уравнение такого вида для классических систем приведено в [10].

3. При выводе формул (4), (8) совершенно не использовались свойства Γ_μ, характерные только для гравитационного поля. Поэтому все заключения будут справедливы и для калибровочных полей. Как известно, Ψ может рассматриваться как вектор некоторого касательного векторного пространства. В этом случае связность Γ_ν выражается через генератор группы симметрии и потенциалы поля, а $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ приобретает смысл тензора напряженности поля [2]. Уравнение вида (10) можно получить аналогичным образом. Например, для заряженных частиц в электромагнитном поле $\Gamma_\mu \sim A_\mu$, $\mathbf{R}_{\mu\nu} \sim F_{\mu\nu}$, $\frac{dp_\mu}{ds} = qF_{\mu\nu}u^\nu$. Дело заключается в том, что независимо от вида Γ_μ оператор параллельного переноса является в некотором смысле обратным по отношению к оператору $\nabla_\mu \nabla^\mu$ (см. напр. (4*б*)).

Этим свойством можно воспользоваться для построения фейнмановского пропагатора векторного поля в пространстве Римана $G^\alpha_{\beta'}(x,x')$ при $R=0$, $R^\alpha_\beta = 0$. В формализме Швингера–Девитта [11] уравнение Клейна–Гордона приводится к виду:

$$i\frac{\partial f(x,s;x',0)}{\partial s} = \nabla_\mu \nabla^\mu f(x,s;x',0), \tag{11}$$

а затем – к интегралу Фейнмана [12] при помощи соотношения:

$$f(x,s+\varepsilon;x',0) = \frac{1}{N}\int \exp\left[-i\left(\frac{\sigma(x,x'')}{2\varepsilon} + \frac{R(x'')}{3}\varepsilon\right)\right] f(x'',s;x',0)\sqrt{-g(x'')}\,d^4x'' + O(\varepsilon^2).$$

Здесь и далее $\sigma(x,x')$ – мировая функция Синга [7], N – нормировочный множитель. В случае векторного поля сделаем подстановку:

$$G^\alpha{}_{\beta'}(x,x') = \int_0^\infty F^\alpha{}_{\beta'}(x,s;x',0)e^{-im^2 s}ds,$$

$$i\frac{\partial F^\alpha{}_{\beta'}}{\partial s} = \nabla_\mu \nabla^\mu F^\alpha_{\beta'}, \lim_{s\to 0} F^\alpha_{\beta'}(x,s;x',0) = \delta^\alpha_{\beta'}\delta_{(4)}(x,x').$$

Естественно предположить, что:

$$F^\alpha_{\beta'}(x,s+\varepsilon;x',0) = \int P^\alpha_{\gamma''}(x,x'')\exp\left[\frac{-i\sigma(x,x'')}{2\varepsilon}\right] F^{\gamma''}_{\beta'}(x'',s;x',0)\frac{\sqrt{-g(x'')}\,d^4x''}{N} + O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Действительно, в нормальных Римановых координатах с началом в x

$$\sigma(x,x'') = \frac{1}{2}\eta_{\hat\alpha\hat\beta}y^{\hat\alpha}y^{\hat\beta}, \quad P^{\hat\alpha}_{\hat\gamma'}(0,y) = \delta^{\hat\gamma}_{\hat\gamma'}\left(\delta^{\hat\alpha}_{\hat\gamma} - \frac{1}{6}R^{\hat\alpha}_{\hat\mu\hat\gamma\hat\nu}y^{\hat\mu}y^{\hat\nu}\right) + O(y^3),$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu A^{\hat\alpha} = \eta^{\hat\mu\hat\nu}\left(\partial_{\hat\mu}\partial_{\hat\nu}A^{\hat\alpha} - \frac{1}{3}R^{\hat\alpha}_{\hat\mu\hat\beta\hat\nu}A^{\hat\beta}\right) + O(y), \quad (-g)^{\frac{1}{2}} = 1 + O(y^3),$$

и подстановка в (12) с разложением F^α_β по степеням ε и y^α доказывает справедливость сделанного предположения.

Следовательно

$$G^\alpha_{\beta'} = \int_0^\infty ds\,\exp(-im^2 s)\int_{x'}^{x} D\{x(s)\}P^\alpha_{\beta'}(x(s))\exp\left[-\frac{i}{4}\int g_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu ds\right], \tag{13}$$

где $P^{\alpha}_{\beta'}(x(s))$ – оператор параллельного переноса по пути $x(s)$, $\int D\{x(s)\}$ – обозначает интеграл по путям, точка – дифференцирование по s. Подынтегральное выражение естественным образом разбивается на два множителя: "динамический" ($\sim \exp(-i/4\int(g\dot{x}\dot{x})ds)$ и "геометрический", явно реализующий параллельный перенос. Зависимость результата переноса от пути напрямую связана с наличием кривизны и позволяет оценивать гравитационные эффекты как следствие нетождественности оператора переноса по замкнутому контуру.

4. Отметим наиболее существенные черты предлагаемого подхода. Во-первых, изменение вида решения волнового уравнения во внешнем поле обусловлено, в первую очередь, не искажением вторичных волн ($\sim\Delta x^3$), а изменением условий их интерференции ($\sim\Delta x^2$ – площадь характерного замкнутого контура [7]). Поэтому качественно взаимодействие волны с гравитационным полем можно представить так: вторичные волны практически не изменяются, но по-другому выглядит результат их суперпозиции из-за наличия кривизны. Во-вторых, параллельный перенос (в том числе и по замкнутому контуру) является не только неким абстрактным понятием. Существуют его конкретные физические реализации, и один из подобных примеров приведен в данной работе. Более того, свойства параллельного переноса в искривленном пространстве могут быть положены в основу изучения влияния гравитации на распространение волн.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1988. С.295.
2. Kibble T.W.D. // J. of Math. Phys. 1961. V.2. P.212.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1967. С.183.
4. Постников М.М. Дифференциальная геометрия. М., 1988. С.327.
5. Там же. С.380.
6. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963. С.64.
7. Там же. С.50.
8. Anandan J. // Nuovo Cimento. 1979. V.53A. P.221.
9. Greenchuk A.V., Ushakov E.A. // Advances in synergetics. 1996. V.8. P.421.
10. Dixon W.G. // Nuovo Cimento. 1964. V.34. P.317.
11. Девитт Б. Динамическая теория групп и полей. М., 1987. С.168.
12. Parker L., Bekenstein S. // Phys. Rev. 1981. V.23D. P.2850.

Поступила в редакцию 21.01.97.

УДК 537.874.6.

А.С.РУДНИЦКИЙ

ДИФРАКЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

The results of investigation of the diffraction by a half-plane for symmetric waves superposition are presented.

Клиновидные или угловые области представляют собой удобную модель для широчайшего класса ключевых структур в электродинамике, акустике, гидродинамике, оптике, сейсмологии и других областях науки и техники. При исследовании поведения волновых полей в таких областях в настоящее время применяют разные методы, в том числе и различные варианты метода отражений [1–5]. В калейдоскопических угловых областях точные решения для дифракционного поля в виде суперпозиции парциальных волн находятся методом геометрической оптики [6–8]. В данной работе изучается возможность представления дифракционного поля в угловых областях в виде суперпозиции дифракционных полей на полуплоскости.

Ограничимся для начала двухмерной задачей, в которой поля не зависят от координаты z. В этом случае система уравнений Максвелла распадается на две подсистемы. Решением одной из них являются волны E-поляризации, а другой – H-поляризации. Рассмотрим суперпозицию E-поляризованных плоских волн

$$E_z^{(i)} = \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[-ikr\cos\left(\theta-\alpha-\frac{4\pi}{N}j\right)\right] \qquad (1)$$