

между формой спектра и характером вертикального распределения радионуклидов в почве.

1. R.L.Ford, W.R.Nelson. The EGS Code System: Computer Programs for the Monte Carlo Simulation of Electromagnetic Cascade Showers (Version 3). Stanford Linear Accelerator Center Report Number SLAC-210 (1978).

2. Бергельсон Б.Р., Зориков Г.А. Справочник по защите от излучения протяженных источников. М., 1965.

3. Арутюнян Р.В., Большов Л.А., Гуло В.Г., Зенич Т.С., Решетин В.П. // Атомная энергия. 1993 (март). Т.74. Вып.3.

4. Ремаев В.В., Кузьменко В.А., Гончаров К.С., Быков В.Т. // Там же. 1993 (январь). Т.74. Вып.1.

Поступила в редакцию 02.09.96.

УДК 519.24:681.5.015

В.В. КАЗАЧЕНОК

ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНОВОЙ РЕГРЕССИИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

The methods of estimation of generalized splines are given.

Введение. Пусть наблюдения y_i в моменты времени t_i , $i=1, \dots, n$, описываются сплайном m -го порядка дефекта k

$$y_i = \sum_{\nu=0}^m c_{\nu} (t_i - t_0)^{\nu} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{ij} (t_i - t_i^*)_+^{m-j} + u_i \quad (1)$$

с узлами в точках t_i^* , $i = 1, \dots, N-1$ [1].

Здесь c_{ν} , $\nu=0, \dots, m$, и a_{ij} , $i=1, \dots, N-1$, $j=0, \dots, k-1$, — неизвестные параметры; u_i , $i=1, \dots, n$, — независимые случайные величины с нулевым средним и неизвестной дисперсией σ^2 ($0 < \sigma^2 < +\infty$);

$$(t_i - t_i^*)_+ = \begin{cases} t_i - t_i^*, & t_i - t_i^* > 0, \\ 0, & t_i - t_i^* \leq 0. \end{cases}$$

Дефект k означает, что сплайн (1) имеет непрерывные производные во всех точках до $(m-k)$ порядка включительно.

Для оценки неизвестных коэффициентов модели (1) можно использовать метод наименьших квадратов. При $k \in \{1, 2, \dots\}$ модель (1) не позволяет адекватно описывать результаты некоторых экспериментов, в частности, в математической физике [2].

Обобщенные сплайны. Обобщенным сплайном m -го порядка дефекта k будем называть сплайн (1) при условии, что значения $(k+1)$ -ых производных в узлах t_i^* , $i = 1, \dots, N-1$, для соседних полиномов могут отличаться на величину v , где v — в общем случае случайная величина с математическим ожиданием r и дисперсией Ψ^2 . Подобно [3] можно показать, что при $r=0$ и $\Psi^2 \rightarrow 0$ обобщенный сплайн дефекта k превращается в обычный сплайн дефекта $(k-1)$, а при $\Psi^2 \rightarrow +\infty$ получаем обычный сплайн дефекта k .

Таким образом, обобщенный сплайн дефекта k является промежуточным звеном между обычными сплайнами дефектов k и $(k-1)$, что позволяет строить сплайновые модели, адекватно описывающие результаты более широкого класса экспериментов.

Для оценивания методом наименьших квадратов неизвестных коэффициентов c_{ν} , $\nu=0, \dots, m$; a_{ij} , $i=1, \dots, N-1$, $j=0, \dots, k-1$, обобщенного сплайна дефекта k предлагается минимизировать выражение

$$\hat{P} = \min_{c_v, a_{ij}} \left\{ \hat{Q} + \frac{\sigma^2}{\psi^2} \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i,k-1} \cdot (m-k+1)! - r)^2 \right\}, \quad (2)$$

где $\hat{Q} = \sum_{l=1}^n \left(Y_l - \sum_{v=0}^m c_v (t_l - t_0)^v - \sum_{i=1}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} (t_l - t_i^*)^{m-j} \right)_+^2$. Обоснование формулы (2) приводится методом, предложенным в [4].

Таким образом можно получить обобщенные сплайны дефекта k , приближающиеся к обычным сплайнам дефекта k или $(k-1)$ в зависимости от задаваемого значения $\frac{\sigma^2}{\psi^2}$.

При неизвестном расположении узлов $t_i^*, i = 1, \dots, N-1$, их поиск можно осуществить одним из методов, изложенных в [4-7].

Результаты численных экспериментов. В таблице приведены результаты численных экспериментов при следующих исходных данных: $t_l = (l-1) \cdot 0,1, l = 1, \dots, n, t^* = 3,9, N=2, n=60, m=3, k=2, c_0=5, c_1=4, c_2=-3, c_3=2, a_{10}=-1, a_{11}=0,5$. Значения $u_l, l = 1, \dots, n$, генерировались с помощью стандартной программы GAUSS при $\sigma=0,5$, и далее $y_l, l = 1, \dots, n$, вычислялись по формуле (1). Каждый эксперимент воспроизводился 50 раз при различных выборочных значениях $u_l, l = 1, \dots, n$. Средние по всем экспериментам значения $\hat{S}^2 = \frac{1}{(n+1)-6} \hat{P}$ при различных отношениях $\frac{\sigma^2}{\psi^2}$ приведены в таблице. В таблице также приведены усредненные значения $\hat{S}^2 = \frac{1}{(n-6)} \hat{Q}$ и $\hat{S}^2 = \frac{1}{(n-5)} \hat{Q}$, вычисленные для обычных сплайнов дефекта $k=2$ и $k=1$ соответственно.

Оценки неизвестных параметров для обычных и обобщенных сплайнов

σ^2/ψ^2	$\hat{S}^2$	$\hat{c}_0$	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_3$	$\hat{a}_{10}$	$\hat{a}_{11}$
		5,0	4,0	-3,0	2,0	-1,0	0,5
0,001	0,247	5,24	3,63	-2,88	1,99	-0,62	-0,34
0,01	0,246	5,25	3,66	-2,88	1,99	-0,62	-0,33
0,1	0,252	5,25	3,63	-2,86	1,98	-0,65	-0,17
1,0	0,296	5,31	3,38	-2,71	1,96	-0,84	0,45
10,0	0,273	5,33	3,35	-2,70	1,96	-0,84	0,50
100,0	0,250	5,34	3,34	-2,68	1,96	-0,84	0,50
1000,	0,256	5,31	3,38	-2,70	1,96	-0,85	0,50
$k=2$	0,247	5,24	3,36	-2,88	1,99	-0,62	-0,34
$k=1$	0,256	5,27	3,52	-2,81	1,98	-0,72	-

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений. М., 1984.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.
3. Казаченок В. В. // ЭВМ — учебному процессу, науке и технике. Мн., 1985. С.44.
4. Медведев Г., Казаченок В. // Статистические проблемы управления. Вильнюс, 1984. Вып.65. С.128.
5. Казаченок В. В., Фомина Т. Н. // Конференция математиков Беларуси. Тез. докл. Гродно, 1992. Ч.4. С.59.
6. Казаченок В. В. // New Venture in the Process of Grand Europe Economic Development: II congress AEDEM. Мн., 1993. С.160.
7. Казаченок В. В. // Автоматизация проектирования дискретных систем: Междунар. конференция. Мн., 1995. С.78.