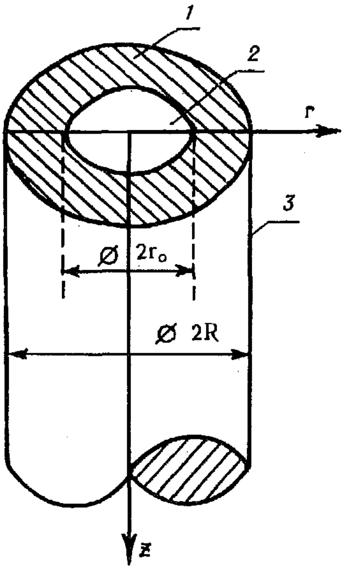
УДК 517.968

Н.А. АБДЕЛЬРАЗАК (ИОРДАНИЯ)

МЕТОД ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПРИМЕРЕ ТЕПЛООБМЕНА ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

It is require to find the axisymmetric solution $\theta(r,z,\tau)$ of the heat conductivity equation in the semi-infinite cylinder $0\le r<R$, $z\ge 0$, $\tau>0$, under mixed boundary condition.

With the help of Laplace transform and apply method separation of variables, the general solution of the given problem introduce to the Fredholm integral equation of the second order.



Постановка задачи. Требуется найти температурное поле $\theta(r,z,\tau)=T(r,z,\tau)-T_0$ в полуограниченном сплошном цилиндре радиуса $r=R$, $z\ge 0$ (см. рисунок). Начальная температура тела равна T_0.

На торцевой поверхности полуограниченного цилиндра $z=0$, $0\le r<r_0$ задается нормальная производная $\theta_z(r,0,\tau)=-q^*(r,\tau)$, а вне круга $r_0\le r<R$, $z=0$ поддерживается начальная температура T_0. На боковой поверхности цилиндра $r=R$, $z>0$, $\tau>0$ поддерживается начальная температура T_0.

Требуется решить уравнение нестационарной теплопроводности в цилиндрических координатах при наличии осевой симметрии

$$\theta_{rr}(r,z,\tau)+\frac{1}{r}\theta_r(r,z,\tau)+\theta_{zz}(r,z,\tau)=\theta_\tau(r,z,\tau)/a \qquad (1)$$

где $0\le r<R$, $z>0$, $\tau>0$, соответственно цилиндрические координаты и τ – время; a – коэффициент температуропроводности (диффузии).

Начальное условие: $\theta(r,z,0)=T(r,z,0)-T_0=0$.

Граничные условия:

$$\theta_z(r,0,\tau)=q(r,\tau)/\lambda=-q^*(r,\tau),\ 0\le r<r_0,\ z=0, \qquad (2)$$

$$\theta(r,0,\tau)=0,\ r_0<r<R,\ z=0, \qquad (3)$$

$$\theta(R,z,\tau)=0,\ 0\le z<\infty,\ r=R, \qquad (4)$$

$$\theta_r(0,z,\tau)=0,\ 0<z<\infty,\ r=0,\ \tau>0, \qquad (5)$$

$$\theta_z(r,\infty,\tau)=0, 0\le r<R,\ z\to\infty. \qquad (6)$$

После применения интегрального преобразования Лапласа

$$\theta(r,z,s)=L[\theta(r,z,\tau)]=\int_0^\infty \theta(r,z,\tau)\exp(-s\tau)d\tau \qquad (7)$$

к выражениям (1–6) и метода разделения переменных к уравнению (1) представим общее решение для изображения $\theta(r,z,s)$ в виде следующего ряда:

$$\theta(r,z,s)=T(r,z,s)-T_0/s=0=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C}_n(\lambda_n,s)\exp\left(-\left|\frac{z}{r_0}\right|\sqrt{\lambda_n^2+s\,r_0^2/a}\right)J_0(\lambda_n,\rho), \qquad (8)$$

в котором λ_n – корни уравнения

$$J_0(\lambda_n \alpha)=0, \qquad (9)$$

причем $\rho = \frac{r}{r_0}$, $\alpha = \frac{R}{r_0}$, $\alpha > 1$.

При решении (8) использованы граничные условия (5), (6).

Применяя разрывные граничные условия (3) и (4) на поверхности z=0, из (8) получаем следующие парные сумматорные уравнения (парные ряды) вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{C}_n(\lambda_n, s)\sqrt{\lambda_n^2 + s r_0^2/a}\ \ J_0(\lambda_n, \rho) = \overline{q}\,^*(\rho, s), \quad 0 \le \rho < 1, \qquad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{C}_n(\lambda_n, s)\ \ J_0(\lambda_n, \rho) = 0, \quad 1 < \rho < \alpha, \qquad (11)$$

из которых требуется определить $\overline{C}_n(\lambda_n s)$.

При $s \to 0$ (стационарный вариант рассматриваемой задачи) парные ряды (10), (11) и решение (8) переходят в известные [1,2].

Введем обозначение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{C}_n(\lambda_n, s)\ \ J_0(\lambda_n, \rho) = \overline{h}(\rho, s), \quad 0 \le \rho < 1. \qquad (12)$$

Тогда по формуле обращения для ряда Фурье–Бесселя

$$\overline{C}_n(\lambda_n, s) = \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n, \alpha)} \int_0^1 \overline{h}(u, s) J_0(u, s)(\lambda_n u) u\,du. \qquad (13)$$

При этом считалось, что поскольку соответствующий интеграл на промежутке $1<\rho<\alpha$ равен нулю, то одно из парных уравнений (11) уже удовлетворено.

Введем теперь вместо $\overline{h}(\rho, s)$ новую неизвестную функцию $\overline{\Phi}(t, s)$ с помощью формулы

$$\overline{h}(\rho, s) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} \int_\rho^1 \overline{\Phi}(t, s)\sqrt{t^2 - \rho^2}\,dt, \qquad (14)$$

подставим (14) в (13) и преобразуем выражение (13)

$$\overline{C}_n(\lambda_n, s) = \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n, \alpha)} \int_0^1 J_0(\lambda_n u)\left[\frac{d}{du} \int_\rho^1 \overline{\Phi}(t, s)\sqrt{t^2 - u^2}\,dt\right] du =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha)\sqrt{\lambda_n}} = \int_0^1 \sqrt{t}\,\overline{\Phi}(t, s) J_{1/2}(\lambda_n t)\,dt, \quad 0 \le \rho < 1. \qquad (15)$$

Подставляя значение $\overline{C}_n(\lambda_n s)$ из (15) в первое из парных уравнений (10), получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\frac{2}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n \rho)}{J_1^2(\lambda_n \alpha)\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 \sqrt{t} J_{1/2}(\lambda_n t)\left[\overline{\Phi}(t, s)\sqrt{\lambda_n^2 a/r_0^2 + s}\right] dt = \overline{q}\,^*(\rho, s), \qquad (16)$$
$$0 \le \rho < 1.$$

Введем другую неизвестную функцию $\overline{F}(t, s)$:

$$\lambda_n \overline{F}(t, s) = \overline{\Phi}(t, s)\sqrt{\lambda_n^2 a/r_0^2 + s}, \qquad (17)$$

где $\overline{F}(t, s) = \int_0^\infty F(t, \tau)\exp(-s\tau)\,d\tau$.

Тогда связь между изображениями функций $\overline{F}(t,s)$ и $\overline{\Phi}(t,s)$ будет

$$\overline{\Phi}(t,s) = \frac{\lambda_n \overline{F}(t,s)}{\sqrt{\lambda_n^2 a/r_0^2 + s}}$$
$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 a/r_0^2 + s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\lambda_n \frac{a\tau}{r_0^2}\right], \tag{18}$$

связь между оригиналами $\Phi(t,\tau)$ и $\overline{F}(t,\tau)$

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda_n \overline{F}(t,s)}{\sqrt{s + a\lambda_n^2 r_0^2}}\right] = \Phi(t,\tau) = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{F(t,\xi)}{\sqrt{\tau-\xi}}\exp\left[-a(\tau-\xi)\lambda_n^2/r_0^2\right]d\xi. \tag{19}$$

Подставив (17) в уравнение (16), получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\frac{2}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_n}J_0(\lambda_n\rho)}{J_1^2(\lambda_n\alpha)}\int_0^1\sqrt{t}\;\; J_{1/2}(\lambda_n t)\overline{F}(\mathrm{t,s})dt = \overline{q}*(\rho,s), \quad 0 \le \rho < 1. \tag{20}$$

Введем обозначение

$$S(\rho,t) = \frac{2}{\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_n}J_0(\lambda_n\rho)J_{1/2}(\lambda_n t)}{J_1^2(\lambda_n\alpha)}. \tag{21}$$

Тогда (20) запишется в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\int_0^1\sqrt{t}\;\; S(\rho,t)\overline{F}(t,s)dt = \overline{q}*(\rho,s), \quad 0 \le \rho < 1. \tag{22}$$

Применяя способ, основанный на специальном контурном интегрировании (см. [2]), сумму (21) можно представить в следующем виде:

$$S(\rho,t) = \int_0^\infty J_0(\rho x)\;\; J_{1/2}(tx)(x)^{3/2}dx + \frac{2}{\pi}L(\rho,t), \tag{23}$$

$$L(\rho,t) = \int_0^\infty \frac{K_0(\alpha y)}{I_0(\alpha y)}I_0(\rho y)\;\; J_{1/2}(tx)(y)^{3/2}dy. \tag{24}$$

Первая квадратура, стоящая в формуле (23), может быть выражена через функцию Хевисайда [1]:

$$\int_0^\infty J_0(\rho x)\;\; J_{1/2}(tx)(x)^{3/2}dx = \frac{2^{3/2}t^{1/2}(\rho^2-t^2)^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}H(\rho-t), \tag{25}$$

где $H(\rho - t) = \begin{cases}0, & \rho < t,\\ 1, & \rho > t.\end{cases}$ (26)

С учетом формул (23)–(26) уравнение (22) запишется в виде:

$$\frac{4\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)}\int_0^\rho \frac{\overline{F}(t,s)t}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt = \overline{q}*(\rho,s) - \frac{2}{\pi}\sqrt{2}\Gamma(3/2)\int_0^1 \overline{F}(t,s)\sqrt{t}L(\rho,t)dt. \tag{27}$$

Рассматривая (27) как интегральное уравнение Абеля, находим

$$t\overline{F}(t,s) = \frac{2^{-1}}{[\Gamma(3/2)]^2}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u\overline{q}*(u,s)du}{(t^2-u^2)^{-1/2}} -$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{\pi\Gamma(3/2)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{udu}{(t^2-u^2)^{-1/2}}\int_0^1 \overline{F}(y,s)\sqrt{y}L(u,y)dy. \tag{28}$$

Последнее уравнение есть интегральное уравнение относительно искомой функции $\overline{F}(t,s)$, однако его ядро представляется двукратной квадратурой. С помощью несложных преобразований уравнение (28) можно привести к виду:

$$\overline{F}(x,s)-\frac{2x}{\pi}\int_0^1 (t/x)^{1/2}K(x,t)\overline{F}(t,s)dt=\overline{Q}(x,s),$$

где

$$K(x,t)=\int_0^\infty \frac{K_0(\alpha y)}{I_0(\alpha y)}I_{1/2}(ty)\ I_{1/2}(xy)y\,dy,$$

$$\overline{Q}(x,s)=\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\int_0^x u\overline{q}*(u,s)\sqrt{x^2-u^2}du.$$

После того, как определена функция $\overline{F}(x,s)$, по формулам (18) и (19) находим функцию и $\overline{\Phi}(t,s)$ и $\Phi(t,\tau)=L^{-1}[\Phi(t,s)]$, затем находим коэффициент $\overline{C}_n(\lambda_n,s)$:

$$\overline{C}_n(\lambda_n,s)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2J_1^2(\lambda_n\alpha)\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1\sqrt{t}\ \Phi(t,\tau)J_{1/2}^{'}(\lambda_n t)dt.$$

Во временной области запишется в виде

$$\overline{C}_n(\lambda_n,\tau)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2J_1^2(\lambda_n\alpha)\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1\sqrt{t}\ \Phi(t,\tau)J_{1/2}(\lambda_n t)dt.$$

1. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. 1977.
2. Sneddon I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальных функций. М., 1983.

Поступила в редакцию 30.05.95.

УДК 517.925.42

В.В. АМЕЛЬКИН, А.В. ЛЕВИН

КОНВЕРГЕНТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The criterion of the convergence of the two-dimensional autonomous systems of the ordinary differential equations is deduced. Questions of the stability of motion are considered.

Рассмотрим двумерную автономную вещественную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{1}$$

где функции P и Q принадлежат классу C^1 и имеют единственный общий нуль в начале координат $O(0,0)$ фазовой плоскости.

Обозначим через $\mathcal{M}$ некоторое однопараметрическое семейство траекторий системы (1) и предположим, что каждая траектория из этого семейства пересекается прямой

$$L\colon y=kx(x=ky),-1\le k\le 1.$$

Определение 1. Семейство траекторий $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$ будем называть конвергентным на интервале $I\subset L$ семейством (или, короче, конвергенцией), если направление поля, определяемое системой (1), изменяется вдоль I строго монотонно.