

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С МИНУС-БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

The necessary and sufficient solvability conditions are given in the form of orthogonality of the right hand side with the weight to the constructed base of the co-kernel of the corresponding operator.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{K}^0 \varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t) \frac{t+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = f(t), \quad t \in L = \mathbf{R}, \quad (1)$$

в предположениях:

$$i) \quad a(t) - b(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} g_1(t) e^{i\alpha t},$$

$$ii) \quad a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} g_2(t) e^{i\beta t},$$

iii) α, β — вещественные постоянные, $\alpha \neq \beta$ (при $\alpha = \beta$ индекс оператора $\mathbf{K}^0$ конечен), a_k, b_j — вещественные числа, $a_k \neq b_j$, $k = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{1, \nu}$,

$$m_k, p_j \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m, \quad \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p,$$

$$iv) \quad f(t) \in \mathbf{H}_{[L]}(\eta), \quad 0 < \eta \leq 1,$$

$$v) \quad g_k(t) \in \mathbf{H}_{[L]}(\eta_k), \quad 0 < \eta_k \leq 1, \quad g_k(t) \neq 0, \quad t \in L, \quad k = \overline{1, 2},$$

v) функции $f(t), g_1(t), g_2(t)$ дифференцируемы $m_k - 1$ и $p_j - 1$ раз в точках a_k и b_j соответственно ($k = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{1, \nu}$), а производные максимальных порядков удовлетворяют условию Гельдера в окрестностях этих точек.

Здесь через $\mathbf{H}_{[L]}(\eta)$, $0 < \eta < 1$, обозначен класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на сомкнутой прямой (см. [1], с.20,48).

Будем искать решение уравнения (1) в классе $\mathbf{H}$ функций, ограниченных для $-\infty \leq t \leq +\infty$, удовлетворяющих условию Гельдера на любом конечном промежутке.

Подобно тому, как это сделано в [1], сведем интегральное уравнение (1) к краевой задаче Римана с бесконечным индексом:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

где $\Phi^{\pm}(t)$ — предельные значения интеграла типа Коши:

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm} = \{z | \pm \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$G(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j}} G_0(t) e^{2i\alpha t}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j) g_2(t) e^{i\beta t}}, \quad G_0(t) = \frac{g_1(t)}{g_2(t)},$$

$2\sigma = a - b$. Обозначим $\kappa = \operatorname{Ind} G_0(t)$.

Исчерпывающее исследование разрешимости уравнения (1) в случае $\sigma > 0$ приводится в работе [2].

Пусть $\sigma > 0$.

Рассмотрим однородное уравнение, союзное к уравнению (1):

$$\mathbf{K}^0 \psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{t+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau) b(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = 0, \quad t \in L = \mathbf{R}. \quad (3)$$

Построим решение уравнения (3) в классе $\tilde{H}$.

С помощью кусочно-аналитической функции

$$\Psi^{\pm}(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau)b(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm}, \quad (4)$$

используя формулы Сохоцкого, получим соответствующую краевую задачу Римана с бесконечным индексом:

$$\Psi^{+}(t) = \frac{1}{G(t)} \Psi^{-}(t), \quad t \in L. \quad (5)$$

При $\sigma < 0$ индекс этой задачи плюс-бесконечный, следовательно, к уравнению (3) и задаче (5) применимы рассуждения [2, с.9]. Согласно этим рассуждениям, уравнение (3) в классе $\tilde{H}$ равносильно задаче (5) в классе

$$B^{\pm} = \{f^{\pm} \in A(D^{\pm}) \cap C(D^{\pm} \cup L), \text{ограниченных в } D^{\pm}\}.$$

Уравнение (3) имеет бесконечно много решений в классе $\tilde{H}$. С учетом формулы (4) общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{1}{b(t)} (\Psi^{+}(t) - \Psi^{-}(t)),$$

где $\Psi^{\pm}(t)$ – предельные значения решений краевой задачи (5) в классе $B^{\pm}$ (общая формула решений установлена в [2]):

$$\Psi^{+}(z) = \frac{e^{-i\sigma z} F(z)}{X_0^{+}(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k}},$$

$$\Psi^{-}(z) = \frac{e^{i\sigma z} F(z)}{X_0^{-}(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j}},$$

где $X_0^{\pm}(z)$ – каноническая функция [2, с.6]:

$$X_0^{\pm}(z) = \exp \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G_0(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)},$$

$F(z)$ – произвольная целая функция порядка $\rho \leq 1$, типа $\sigma_F \leq |\sigma|$, контурные значения которой удовлетворяют для всех $t \in R$ неравенству [2, с.9–11]:

$$|F(t)| \leq C \max \left\{ \left| \Psi^{+}(t) X_0^{+}(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} \right|, \left| \Psi^{-}(t) X_0^{-}(t) \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} \right| \right\}.$$

Тогда общее решение уравнения (3) в классе $\tilde{H}$ имеет вид

$$\psi(t) = \frac{2F(t)}{X_0^{+}(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} e^{i(\sigma+\beta)t} g_2(t)}. \quad (6)$$

Для обратимых слева сингулярных интегральных операторов в случае бесконечномерного коядра в [3, с.44] установлено, что разрешимость уравнения с такими операторами равносильна выполнению некоторой счетной системы равенств. Последние, по существу, представляют собой условия ортогональности с некоторым весом правой части уравнения (1) базису e_{ℓ} пространства решений однородного уравнения, союзного данному:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)e_{\ell}(t)dt}{(t+i)^2} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Поскольку доказательство этого утверждения основано на общих свойствах сингулярных операторов, а рассматриваемые нами пространства совпадают с изучаемыми в [3], то аналогичное утверждение имеет место и в нашем случае. Для построения базиса пространства решений уравнения

(3) достаточно применить технику, предложенную в работе [3, с.31]. Элементами базиса являются функции, задаваемые формулой (6):

$$e_\ell = \frac{2F_\ell(t)}{X_0^+(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} e^{i(\sigma+\beta)t} g_2(t)}, \quad (8)$$

где $\ell \in I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, $I_1 = \{r = \overline{1, m_k}, k = \overline{1, \mu}\}$, $I_2 = \{q = \overline{1, p_j}, j = \overline{1, \nu}\}$, $I_3 = \{s \in \mathbb{Z}\}$, для которых

$$F_\ell(t) = \frac{F_*(t)}{(t - a_k)^r (t + i)^{\kappa-1}}, \quad \ell \in I_1,$$

$$F_\ell(t) = \frac{F_*(t)}{(t - b_j)^q (t + i)^{\kappa-1}}, \quad \ell \in I_2,$$

$$F_\ell(t) = \frac{F_*(t)}{(t - \frac{\pi s}{\sigma} - i)(t + i)^{\kappa-1}}, \quad \ell \in I_3,$$

где $F_*(z) = \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j} \sin \sigma(z - i)$ при $\kappa+1 > 0$ и $F_*(z) = \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j} (z + i)^{\kappa+1} \sin \sigma(z - i)$ при $\kappa+1 \leq 0$.

Установим следующий результат.

Теорема 1. При $\sigma < 0$ уравнение (1) в предположениях $i) - iv)$ в классе $\tilde{\mathbf{H}}$ равносильно краевой задаче Римана в классе $\mathbf{B}^\pm$.

Доказательство. Покажем сначала, что каждому решению задачи (2) $\Phi^\pm(t) \in \mathbf{B}^\pm$ соответствует по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \quad (9)$$

решение уравнения (1) в классе $\tilde{\mathbf{H}}$.

Как было показано в [2, с.23], единственное решение задачи (2), ограниченное в окрестности бесконечности, имеет вид:

$$\Phi_1^+(z) = \frac{e^{i\sigma z} X_0^+(z) \Omega^+(z)}{V_0(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j}}, \quad (10)$$

$$\Phi_1^-(z) = \frac{e^{-i\sigma z} X_0^-(z) \Omega^-(z)}{V_0(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k}},$$

где

$$\Omega^-(z) = \frac{(z + i)^{\kappa+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i(\sigma+\beta)\tau} V_0(\tau) d\tau}{2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + i)^{\kappa+1} X_0^+(\tau) g_2(\tau) (\tau - z)}, \quad z \in D^\pm,$$

$V_0(z)$ — целая функция, двоякоограниченная на вещественной оси, такая что функции $V_0(z)e^{i\sigma z}$, $V_0(z)e^{-i\sigma z}$ имеют порядок $\rho \leq 1$ и неположительные индикаторы в D^+ и D^- соответственно. Несложно убедиться, что можно выбрать целую функцию $V_0(z)$, в частности, следующим образом:

$$\text{при } \kappa+1 > 0 \quad V_0(z) = \sin \sigma(z - i),$$

$$\text{при } \kappa+1 \leq 0 \quad V_0(z) = (z + i)^{\kappa+1} \sin \sigma(z - i).$$

Полученное решение принадлежит классу $\mathbf{B}^\pm$, если нули функции $\Omega^\pm(z)$ совпадают с нулями функции $V_0(z)$ и точки a_k и b_j являются нулями

кратностей m_k и p_j функций $\Omega^-(z)$ и $\Omega^+(z)$ соответственно. Отсюда вытекают условия разрешимости задачи (4) в классе $\mathbf{B}^\pm$:

$$\begin{aligned}\Omega^\pm\left(\frac{\pi\ell}{\sigma} + i\right) &= 0, \ell \in \mathbf{Z}, \\ \Omega^{+(q)}(b_j) &= 0, q = \overline{0}, p_j - 1, j = \overline{1}, \nu, \\ \Omega^{-(r)}(a_k) &= 0, r = \overline{0}, m_k - 1, k = \overline{1}, \mu.\end{aligned}\quad (11)$$

Предположим, что выполнены условия (11). Тогда задача (2) в классе $\mathbf{B}^\pm$ имеет единственное решение.

Обозначим $\varphi_1(t) := \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$, где $\Phi_1^\pm(t)$ – предельные значения функции $\Phi_1^\pm(z)$, задаваемые равенствами (10). Очевидно, $\varphi_1(t) \in \tilde{\mathbf{H}}$. Проводя рассуждения, аналогичные [2, с.4], получаем, что $\varphi_1(t)$ – решение интегрального уравнения в классе $\tilde{\mathbf{H}}$. Это означает, что выполнены условия (7).

Докажем теперь, что если не выполнено хотя бы одно из условий (11), то не выполняются и условия (7). Иными словами, в случае, когда неразрешима задача (2) в классе $\mathbf{B}^\pm$, неразрешимо и уравнение (1) в классе $\tilde{\mathbf{H}}$. Предположим противное: пусть хотя бы одно из условий (11) не выполнено, но выполнены условия (7). Если в качестве базиса пространства решений однородного союзного уравнения (3) выбрать базис (8), то получим, что условия (7) в точности совпадают с равенствами (11). Значит, разрешима задача (2), что противоречит предположению.

Замечание. В действительности, существует связь между решениями уравнения (1) и задачи (2). При доказательстве теоремы уже использовалось, что каждому решению задачи (2) в классе $\mathbf{B}^\pm$, удовлетворяющему условиям разрешимости, отвечает по формуле (9) решение уравнения (1) из класса $\tilde{\mathbf{H}}$. Верно и обратное: для решения уравнения (1) $\varphi_1(t) \in \tilde{\mathbf{H}}$ существует решение задачи (2) $\Phi_1^\pm(z) \in \mathbf{B}^\pm$ такое, что

$$\varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t).$$

Пусть уравнение (1) разрешимо, тогда задача (2) имеет решение, задаваемое формулой (10).

Функция $\Phi_1^\pm(z)$ – кусочно-аналитическая, удовлетворяющая условию $\Phi_1^-(-i) = 0$. Она представима интегралом типа Коши с плотностью $\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$. С другой стороны, предельные значения функции, задаваемой интегралом типа Коши

$$\Phi^\pm(z) = \frac{z + i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\tau + i)(\tau - z)}, \quad z \in D^\pm,$$

удовлетворяют краевому условию (2) по построению. Используя формулы Сохоцкого, несложно установить, что

$$\varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t). \quad (12)$$

Из теоремы непосредственно вытекает результат о разрешимости уравнения (1):

Следствие. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение (1) в предположениях i)–iv) при $\sigma < 0$ в классе $\tilde{\mathbf{H}}$, вообще говоря, неразрешимо. При выполнении счетного числа условий разрешимости вида (7) его единственное решение дается формулой (12), в которой $\Phi_1^\pm(t)$ – предельные значения функций $\Phi_1^\pm(z)$, задаваемых равенствами (10).

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

2. Дубатовская М. В., Rogozin С. В. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с бесконечным индексом в исключительном случае. Мн., 1995. Деп. в ВИНТИ 01.08.95, № 2343–В95.

3. Дыбин Д. В. Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. Ростов-на-Дону, 1988.

Поступила в редакцию 07.02.96.