

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В МЕТОДЕ ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. М. ВОЛКОВ¹⁾, Е. В. ПРОКОНИНА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена проблема построения эффективных разностных схем и итерационных методов для решения задач анизотропной диффузии в области произвольной геометрии. Для упрощения постановки краевых условий Неймана использован метод фиктивных областей. На примере модельной двумерной задачи о распределении потенциала в кольцевом изолированном анизотропном проводнике проведен сравнительный анализ эффективности некоторых перспективных разностных схем и итерационных методов с точки зрения их сочетаемости с методом фиктивных областей. На основе численных экспериментов получены эмпирические оценки асимптотики роста количества итераций метода бисопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации при уменьшении шага сетки и величины малого параметра, определяющего продолжение ко-эффективности проводимости в методе фиктивных областей. Показано, что для одной из рассмотренных схем переобусловливатель Фурье – Якоби является спектрально оптимальным и позволяет устранить асимптотическую зависимость скорости сходимости как от величины шага сетки, так и от значения малого параметра в методе фиктивных областей.

Ключевые слова: разностные схемы; эллиптические уравнения; смешанные производные; итерационные методы; метод фиктивных областей.

ITERATIVE REALIZATION OF FINITE DIFFERENCE SCHEMES IN THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR ELLIPTIC PROBLEMS WITH MIXED DERIVATIVES

V. M. VOLKOV^a, A. U. PRAKONINA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. U. Prakonina (helen.prokonina@mail.ru)

Development of efficient finite difference schemes and iterative methods for solving anisotropic diffusion problems in an arbitrary geometry domain is considered. To simplify the formulation of the Neumann boundary conditions, the method of fictitious domains is used. On the example of a two-dimensional model problem of potential distribution in an

Образец цитирования:

Волков ВМ, Проконина ЕВ. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:69–76.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-69-76>

For citation:

Volkov VM, Prakonina AU. Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:69–76. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-69-76>

Авторы:

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Елена Владимировна Проконина – старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:

Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of web-technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.

v.volkov@tut.by

Alena U. Prakonina, senior lecturer at the department of web-technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.

helen.prokonina@mail.ru

isolated anisotropic ring conductor a comparative efficiency analysis of some promising finite-difference schemes and iterative methods in terms of their compatibility with the fictitious domain method is carried out. On the basis of numerical experiments empirical estimates of the asymptotic dependence of the convergence rate of the bi-conjugate gradient method with Fourier – Jacobi and incomplete LU factorization preconditioners on the step size and the value of the small parameter determining the continuation of the conductivity coefficient in the fictitious domain method are obtained. It is shown, that for one of the considered schemes the Fourier – Jacobi preconditioner is spectrally optimal and allows to eliminate the asymptotical dependence of the iterations number to achieve a given accuracy both on the value of the step size and the value of the small parameter in the fictitious domain method.

Key words: finite-difference schemes; elliptic equations; mixed derivatives; iterative methods; fictitious domain method.

Введение

Один из эффективных подходов к решению дифференциальных краевых задач в области произвольной формы основан на использовании метода фиктивных областей. Его идея состоит в дополнении исходной области D до прямоугольного параллелепипеда D_0 ($D \subset D_0$) с последующей формулировкой краевых условий на внешней границе области D и таким продолжением коэффициентов задачи в дополняющей подобласти (между границами D и D_0), чтобы оригинальные краевые условия на границе области D выполнялись для модифицированной задачи естественным образом. Например, в случае задачи Неймана для уравнения диффузии с условиями непроницаемости на криволинейной границе естественно использовать на внешней границе области D_0 однородные условия Дирихле и бесконечно малые значения коэффициента диффузии – в дополняющей подобласти. Подробное описание данной методики приводится в работах [1–5].

Основная проблема метода фиктивных областей как одной из составляющих методики численного анализа дифференциальных прикладных задач связана с ухудшением свойств обусловленности матрицы системы сеточных уравнений [2; 5]. Как правило, рост числа обусловленности влечет за собой увеличение количества итераций для достижения заданной точности при итерационной реализации дискретной задачи [6]. Данный недостаток традиционно преодолевают путем применения неявных итерационных алгоритмов. Для этих целей хорошие результаты дает использование переменного треугольного метода [4], метода переменных направлений [3].

В настоящей работе показано, что в методе фиктивных областей для эллиптических уравнений со смешанными производными эффективность итерационной реализации зависит не только от выбора переобусловливателя, но и от способа аппроксимации смешанных производных. На основе численных экспериментов для двух разностных схем получены эмпирические оценки асимптотической зависимости числа итераций метода бисопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации от количества узлов сетки и величины малого параметра, определяющего продолжение коэффициента диффузии в методе фиктивных областей. Показано, что для одной из рассмотренных схем использование переобусловливателя Фурье – Якоби практически устраняет нежелательную зависимость количества итераций как от числа узлов сетки, так и от величины малого параметра.

Постановка задачи

Распределение электрического потенциала в анизотропном изолированном проводнике описывается задачей Неймана для уравнения эллиптического типа со смешанными производными. Для простоты рассмотрим двумерный случай плоской непрямоугольной области D с границей Γ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), (x, y) \in D, \left. \frac{du}{d\mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к Γ .

Коэффициенты тензора проводимости могут быть вычислены путем преобразования плоских вращений локальной системы ортогональных координат (\bar{x}, \bar{y}) , оси которой ориентированы вдоль направлений анизотропии. Например, для кольцевой области, в которой радиальная и тангенциальная проводимости равны соответственно σ_r, σ_t ($\sigma_r \neq \sigma_t$), компоненты тензора проводимости определяются следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь φ – угловая полярная координата точки кольца: $D = \{(x, y), R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$. Отношение коэффициентов диагонального тензора проводимости принято характеризовать коэффициентом анизотропии $\lambda = \frac{\sigma_r}{\sigma_t}$. В случае $\lambda \neq 1$ коэффициенты при смешанных производных знакопеременны. Тензор диффузии является симметричным и положительно определенным.

Для анализа рассмотренной задачи наиболее естественно использовать полярные координаты, в которых упрощается постановка краевых условий, поскольку $\frac{du}{d\mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial r}$ и уравнение не содержит смешанных производных. С другой стороны, в общем случае можно применить метод фиктивных областей [1–5], дополнив область до квадрата

$$D_0 = \{(x, y), -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L, L > R_2\}, \quad (3)$$

полагая $\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_0 \ll 1$, $\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y) = 0$ и $f(x, y) \equiv 0$ при $(x, y) \in D_0 \setminus D$. На границе Γ_0 квадратной области допустимо использовать как однородные условия Неймана, так и условия Дирихле. Наиболее удобны условия

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0. \quad (4)$$

Близость решения задачи в методе фиктивных областей $\tilde{u}(x, y)$ к решению оригинальной задачи (1) определяется порядком малости коэффициента проводимости за пределами оригинальной области D [4]:

$$\|u - \tilde{u}\|_{W_2^1(D)} = O(\sigma_0^2), \quad \|u\|_{W_2^1(D)}^2 = \iint_D \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (5)$$

Согласно (5) для минимизации погрешности, связанной с использованием метода фиктивных областей, значение параметра σ_0 следует выбирать достаточно малым. С другой стороны, появление малого параметра сопряжено с ухудшением числа обусловленности матрицы дискретной задачи, что предъявляет повышенные требования к построению как разностной схемы, так и итерационных методов реализации системы сеточных уравнений.

Численный метод

Для разностной схемы решения задачи (1), (3), (5) используем равномерную сетку

$$\omega_h = \{(x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}\}.$$

Вторые производные уравнения аппроксимируем стандартным образом [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \cong h_x^{-2} \left[\sigma_{xx}^{i+0.5, j} U_{i+1, j} - (\sigma_{xx}^{i+0.5, j} + \sigma_{xx}^{i-0.5, j}) U_{i, j} + \sigma_{xx}^{i-0.5, j} U_{i-1, j} \right], \quad (6)$$

где $\sigma_{xx}^{i \pm 0.5, j} = \frac{\sigma_{xx}^{i, j} + \sigma_{xx}^{i \pm 1, j}}{2}$, $U_{i, j} = u(x_i, y_j)$.

Для аппроксимации смешанных производных рассмотрим два варианта разностных формул [7; 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &\cong \frac{1}{4h_x h_y} \left(\sigma_{xy}^{i+0.5, j} (U_{i+1, j+1} - U_{i+1, j-1} + U_{i, j+1} - U_{i, j-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{xy}^{i-0.5, j} (U_{i, j+1} - U_{i, j-1} + U_{i-1, j+1} - U_{i-1, j-1}) \right), \quad (7) \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &\cong \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0.5, j)} (U_{i+1, j+1} - U_{i+1, j}) - \sigma_{xy}^{+(i-0.5, j)} (U_{i, j+1} - U_{i, j}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{+(i+0.5, j)} (U_{i, j} - U_{i, j-1}) - \sigma_{xy}^{+(i-0.5, j)} (U_{i-1, j} - U_{i-1, j-1}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0,5, j)} (U_{i+1, j} - U_{i+1, j-1}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5, j)} (U_{i, j} - U_{i, j-1}) \right] + \\
 & + \frac{1}{4h_x h_y} \left[\sigma_{xy}^{-(i+0,5, j)} (U_{i, j+1} - U_{i, j}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5, j)} (U_{i-1, j+1} - U_{i-1, j}) \right].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\sigma_{xy}^{\pm(i, j)} = \sigma_{xy}^{(i, j)} \pm |\sigma_{xy}^{(i, j)}|$.

Обе схемы – (6), (7) и (6), (8) – консервативны и обладают вторым порядком точности на достаточно гладких входных данных. Кроме того, как показано в [8; 9], при выполнении условий

$$\max \{k_1, k_2\} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \min \{k_3, k_4\}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{|\sigma_{xy}^{(i-0,5, j)}| - \sigma_{xy}^{(i-0,5, j)} + |\sigma_{xy}^{(i+0,5, j)}| + \sigma_{xy}^{(i+0,5, j)} + 2|\sigma_{xy}^{(i, j-0,5)}|}{4\sigma_{yy}^{(i, j-0,5)}}, \\
 k_2 &= \frac{|\sigma_{xy}^{(i-0,5, j)}| + \sigma_{xy}^{(i-0,5, j)} + |\sigma_{xy}^{(i+0,5, j)}| - \sigma_{xy}^{(i+0,5, j)} + 2|\sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}|}{4\sigma_{yy}^{(i, j+0,5)}}, \\
 k_3 &= \frac{4\sigma_{xx}^{(i-0,5, j)}}{2|\sigma_{xy}^{(i-0,5, j)}| + |\sigma_{xy}^{(i, j-0,5)}| - \sigma_{yx}^{(i, j-0,5)} + |\sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}| + \sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}}, \\
 k_4 &= \frac{4\sigma_{xx}^{(i+0,5, j)}}{2|\sigma_{xy}^{(i+0,5, j)}| + |\sigma_{yx}^{(i, j-0,5)}| + \sigma_{yx}^{(i, j-0,5)} + |\sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}| - \sigma_{yx}^{(i, j+0,5)}}.
 \end{aligned}$$

разностная схема (6), (8) удовлетворяет сеточному принципу максимума и является монотонной. Следствие сеточного принципа максимума (монотонности) – гарантированное диагональное доминирование и положительная определенность разностного оператора задачи. Таковая позволяет предположить, что свойство монотонности может обеспечить преимущество данного класса схем при итерационной реализации соответствующей системы разностных уравнений в методе фиктивных областей.

Использование разностной аппроксимации (7) приводит к консервативной, но немонотонной дискретной модели. Тем не менее аппроксимация смешанных производных по формуле (7) представляется наиболее естественной. Несложно заметить, что аппроксимация внутренних производных в дивергентной записи уравнения (1), согласно формулам (6) и (7), имеет второй порядок точности в одних и тех же полуцелых точках сетки $(x_{i \pm 0,5}, y_j)$ и $(x_i, y_{j \pm 0,5})$. В этих же точках вычисляются коэффициенты уравнения, определяемые как диагональными, так и недиагональными компонентами тензора диффузии. В отличие от (7) для разностной аппроксимации (8) второй порядок аппроксимации достигается благодаря усреднению смешанных производных по диагонально симметричным ячейкам шаблона с центрами в точках $(x_{i \pm 0,5}, y_{j \pm 0,5})$ для положительных и в точках $(x_{i \pm 0,5}, y_{j \mp 0,5})$ для отрицательных значений недиагональных компонент тензора диффузии.

Рассмотренные варианты разностных схем (6), (7) и (6), (8) сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AU = f, \tag{10}$$

где A – 9-диагональная разреженная матрица для разностных схем на основе формулы (7) и 7-диагональная матрица для схемы (8). Как показано в работе [10], разностная схема (6), (7) имеет некоторое преимущество в скорости сходимости итерационных методов реализации системы сеточных уравнений (10). Исследуем, как соотносится эффективность рассматриваемых схем применительно к методу фиктивных областей.

Результаты численных экспериментов

Для реализации систем разностных уравнений (10) использован метод бисопряженных градиентов (BiCG) [11]. Количество итераций BiCG для достижения заданной точности возрастает пропорционально квадратному корню из числа обусловленности матрицы системы. Численные эксперименты подтверждают оценки скорости сходимости при масштабировании шага сетки. В частности, количество необходимых для достижения заданной точности итераций явного метода BiCG при реализации рассмотренных разностных схем возрастает обратно пропорционально шагу сетки, что полностью согласуется со спектральными свойствами разностного оператора Лапласа [6]. В методе фиктивных областей с малым параметром, определяющим продолжение коэффициента в дополняющую подобласть, грубые оценки допускают рост числа обусловленности пропорционально σ_0^{-1} .

Для ускорения сходимости применялся метод бисопряженных градиентов с переобусловливателями на основе неполной LU-факторизации (iLU) и комбинированный переобусловливатель Фурье – Якоби (FJ), в качестве которого используется стандартная диагональная матрица, построенная из диагональных элементов системной матрицы, и матрица однородной изотропной задачи, для эффективного обращения которой применимо быстрое дискретное преобразование Фурье. Итерации прекращались, когда относительная норма невязки ε достигала значений 10^{-12} – 10^{-11} .

На примере решения модельной задачи (1), (2) исследуем зависимости числа итераций от количества узлов сетки и величины малого параметра σ_0 , определяющего продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей. Кроме того, оценим эффективность рассмотренных переобусловливателей по количеству итераций и суммарным вычислительным затратам, необходимым для решения задачи.

Как видно из рис. 1, разностная схема (6), (7) демонстрирует качественно лучшие характеристики скорости сходимости, которая асимптотически не зависит от размера шага сетки и величины малого параметра. Для разностной схемы (6), (8) рост числа итераций при уменьшении малого параметра также стабилизируется при $\sigma_0 \leq 10^{-4}$, однако по общим вычислительным затратам данная схема примерно в два раза уступает схеме (6), (7). Асимптотика числа итераций в зависимости от количества узлов сетки для схемы (6), (8) оценивается величиной $O(\sqrt{N})$.

На рис. 2 и 3 приведены сравнительные характеристики эффективности переобусловливателей Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации. Результаты для переобусловливателя Фурье – Якоби

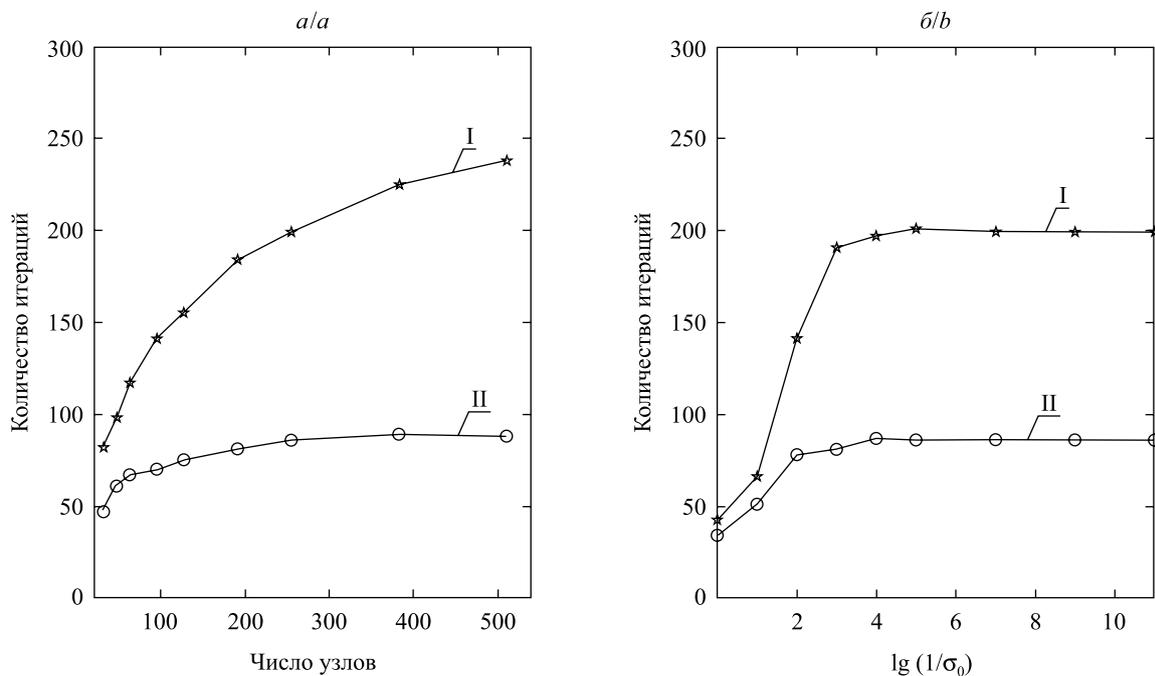


Рис. 1. Зависимости количества итераций метода BiCG с переобусловливателем Фурье – Якоби от числа узлов сетки (а) и величины малого параметра σ_0 (б) при $\lambda = 8$, $\varepsilon = 10^{-12}$:
I – разностная схема (6), (8); II – разностная схема (6), (7)

Fig. 1. Dependence of the iterations number of BiCG method with Fourier – Jacobi preconditioner from the nodes number (a) and small parameter σ_0 value (b) with $\lambda = 8$, $\varepsilon = 10^{-12}$:
I – finite-difference schemes (6), (8); II – finite-difference schemes (6), (7)

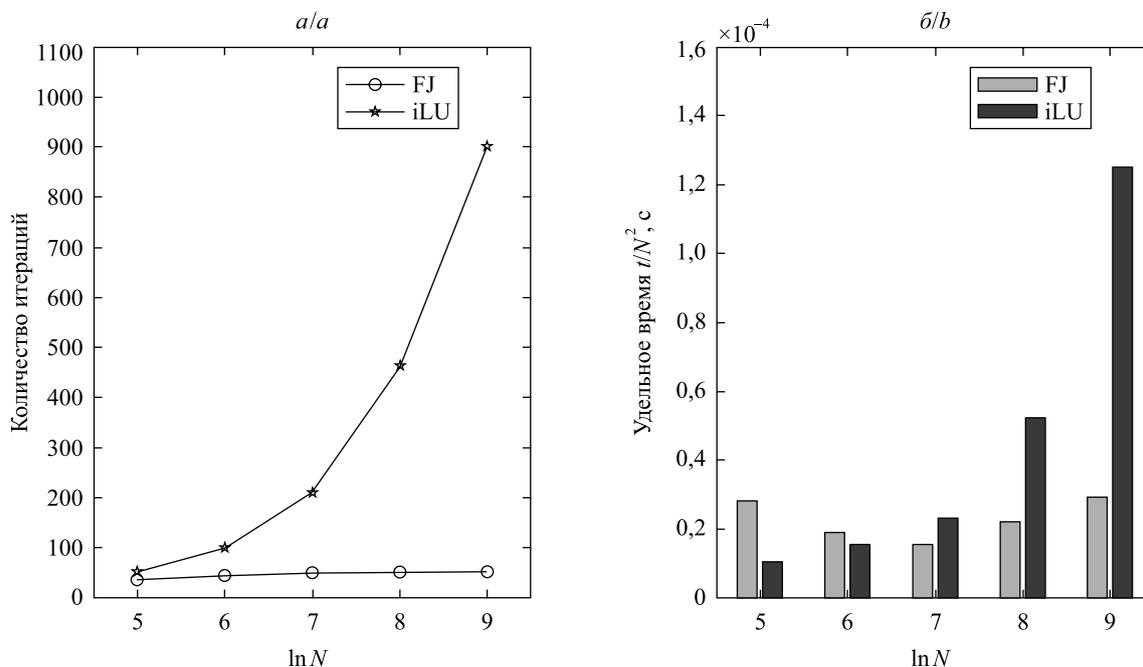


Рис. 2. Количество итераций (а) и удельное время (б) итерационной реализации систем сеточных уравнений (6), (7) на каждый узел сетки для метода BiCG с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации при $\lambda = 4$, $\sigma_0 = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-11}$

Fig. 2. Dependence of the iterations number (a) and time (b) of the implementation of grid equations (6), (7) for each grid node for the BiCG method with Fourier – Jacobi and iLU preconditioners with $\lambda = 4$, $\sigma_0 = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-11}$

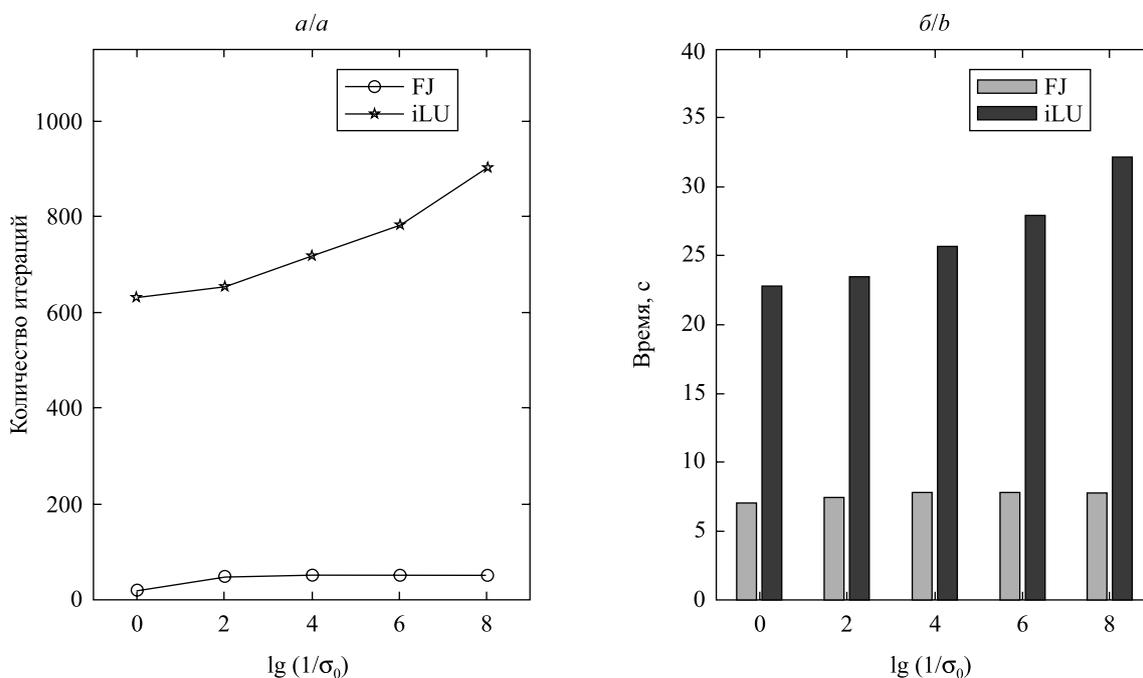


Рис. 3. Зависимости числа итераций (а) и времени реализации (б) метода BiCG с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации от величины малого параметра, отвечающего за продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей для кольцевого проводника с коэффициентом анизотропии проводимости $\lambda = 4$, $N = 2^9$, $\varepsilon = 10^{-11}$

Fig. 3. Dependence of the iterations number (a) and implementation time (b) of BiCG with Fourier – Jacobi and iLU preconditioners from the small parameter σ_0 value, responsible for the continuation of the conductivity coefficient in the fictitious domain method for a circular conductor with a conductivity anisotropy coefficient $\lambda = 4$, $N = 2^9$, $\varepsilon = 10^{-11}$

получены на примерах итерационной реализации разностной схемы (6), (7), которая в предыдущих численных экспериментах зарекомендовала себя более перспективной по сравнению со схемой (6), (8). При неполной LU-факторизации разностная схема (6), (8) в ряде случаев демонстрирует несколько лучшие результаты, поэтому на рис. 2 и 3 представлены данные, соответствующие схеме с более высокой скоростью сходимости.

Результаты показывают, что при количестве узлов сетки по каждому координатному направлению $N \geq 2^7$ метод бисопряженных градиентов для схемы (6), (7) демонстрирует лучшие вычислительные качества совместно с переобусловливателем Фурье – Якоби. Метод неполной LU-факторизации не является спектрально оптимальным ни для одной из рассмотренных схем и характеризуется ростом числа итераций как при уменьшении величины малого параметра σ_0 , так и с увеличением количества узлов сетки. При $N = 512$ итерационный метод BiCG FJ обеспечивает примерно четырехкратное преимущество в скорости решения задачи по сравнению с BiCG iLU (см. рис. 2).

Заключение

Сравнительный анализ эффективности итерационной реализации разностных схем для задач анизотропной диффузии с использованием метода фиктивных областей позволяет сделать вывод, что скорость сходимости итераций и эффективность переобусловливателей во многом зависят от способа аппроксимации смешанных производных. По результатам численных экспериментов особое внимание привлекает разностная схема (6), (7). В ней использована естественная (консервативная, второго порядка точности) разностная аппроксимация смешанных производных на симметричном 6-точечном шаблоне. Для сравнения выбрана наиболее перспективная разностная схема (6), (8), которая при выполнении условия (9), наряду с консервативностью и вторым порядком аппроксимации, удовлетворяет сеточному принципу максимума (монотонна) [8; 9]. Данные численных экспериментов показывают, что по количественным и качественным критериям лучшие показатели демонстрирует схема (6), (7). В частности, только для этой схемы удается построить итерационный алгоритм на основе метода бисопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье – Якоби, в котором устраняется рост числа итераций с уменьшением шага сетки, т. е. указанный тип переобусловливателя является спектрально оптимальным и данная итерационная техника качественно сопоставима с многосеточными итерационными методами [12]. В отличие от попеременно-треугольного метода [4] и метода BiCG iLU использование переобусловливателя Фурье – Якоби устраняет также асимптотический рост числа итераций в зависимости от малого параметра, отвечающего за продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей.

Благодаря отмеченным качественным особенностям разностной схемы (6), (7) эффективность ее итерационной реализации с использованием метода BiCG FJ оказывается существенно выше по сравнению с более перспективным (казалось бы) аналогом (6), (8). Последнее обстоятельство указывает на то, что сеточный принцип максимума не следует рассматривать в качестве критерия, определяющего безусловное преимущество разностной схемы в отношении эффективности ее итерационной реализации.

Библиографические ссылки

1. Коновалов АН. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. *Численные методы механики сплошной среды*. 1972;3(5):52–68.
2. Коновалов АН, Коных ГВ, Цуриков НВ. О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей. В: *Вариационные методы в задачах численного анализа: сборник научных трудов*. Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР; 1986. с. 37–52.
3. Коновалов АН. *Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости*. Новосибирск: Наука; 1988.
4. Вабищевич ПН, Гассиев РВ, Пулатов ПА. Вычислительная реализация метода фиктивных областей для эллиптических уравнений на основе попеременно-треугольного метода. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1987;27(9):1381–1387.
5. Вабищевич ПН. *Метод фиктивных областей в задачах математической физики*. Москва: УРСС; 2016.
6. Самарский АА. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1989.
7. Turovets S, Volkov V, Zherdetsky A, Prakonina A, Malony AD. A 3D finite-difference BiCG iterative solver with the Fourier – Jacobi preconditioner for the anisotropic EIT/EEG forward problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2014;2014:12. DOI: 10.1155/2014/426902.
8. Самарский АА, Мажукин ВИ, Матус ПП, Шишкин ГИ. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными. *Математическое моделирование*. 2001;13(2):17–26.
9. Rybak IV. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modeling and Analysis*. 2004;9(2):169–178.
10. Волков ВМ, Прокопина ЕВ. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2018;54(4): 454–459. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459.

11. Barrett R, Berry M, Chan TF, Demmel J, Donato J, Dongarra J, et al. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. Philadelphia: SIAM; 1994. 143 p.

12. Мартыненко СИ. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках. *Вычислительные методы и программирование*. 2000;1(1):83–102.

References

1. Konovalov AN. Fictitious domain method in filtration problems of a two-phase incompressible fluid, taking into account capillary forces. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoi sredy*. 1972;3(5):52–68. Russian.

2. Konovalov AN, Konuh GV, Tsurikov NV. About principles of building iterative processes in the fictitious domain method. In: *Variatsionnyye metody v zadachakh chislennogo analiza: sbornik nauchnykh trudov*. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 1986. p. 37–52. Russian.

3. Konovalov AN. *Zadachi fil'tratsii mnogofaznoi neszimaemoi zhidkosti* [Filtration problems of multi-phase incompressible fluid]. Novosibirsk: Nauka; 1988. Russian.

4. Vabishevich PN, Gassiev RV, Pulatov PA. Computational realization of fictitious domain method for elliptic equations on the basis of changing-triangular method. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 1987;27(9):1381–1387. Russian.

5. Vabishevich PN. *Metod fiktivnykh oblastei v zadachakh matematicheskoi fiziki* [Fictitious domain method in the problems of mathematical physics]. Moscow: URSS; 2016. Russian.

6. Samarsky AA. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of finite-difference schemes]. Moscow: Nauka; 1989. Russian.

7. Turovets S, Volkov V, Zherdetsky A, Prakonina A, Malony AD. A 3D finite-difference BiCG iterative solver with the Fourier – Jacobi preconditioner for the anisotropic EIT/EEG forward problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2014;2014:12. DOI: 10.1155/2014/426902.

8. Samarskii AA, Mazhukin VI, Matus PP, Shishkin GI. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2001;13(2):17–26. Russian.

9. Rybak IV. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2004;9(2):169–178.

10. Volkov VM, Prakonina AU. Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives. *Vesci Nacyjanal'nej akademii navuk Belarusi. Seryja fizika-matjematychnyh navuk*. 2018;54(4):454–459. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459.

11. Barrett R, Berry M, Chan TF, Demmel J, Donato J, Dongarra J, et al. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. Philadelphia: SIAM; 1994. 143 p.

12. Мартыненко СИ. Universal multigrid technology for the numerical solution of partial differential equations on structured grids. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. 2000;1(1):83–102. Russian.

Статья поступила в редакцию 14.10.2018.

Received by editorial board 14.10.2018.